UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – PODGORICA

Spec. Sci. Tamara Bojičić

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE OPTEREĆENJEM U PAMETNIM ELEKTRODISTRIBUTIVNIM MREŽAMA PRIMJENOM TEORIJE IGARA

- MAGISTARSKI RAD -

Podgorica, 2016. godine

PODACI I INFORMACIJE O MAGISTRANDU

Ime i prezime	**Tamara Bojičić**
Datum i mjesto rođenja	**04.10.1989. u Nikšiću**
Naziv završenog osnovnog studijskog i godina završetka studija	**Elektronika telekomunikacije i računari, 2012.**

INFORMACIJE O MAGISTARSKOM RAD

Naziv postdiplomskog studija	**Računari**
Naslov rada	**AUTOMATSKO UPRAVLJANJE OPTEREĆENJEM U PAMETNIM ELEKTRODISTRIBUTIVNIM MREŽAMA PRIMJENOM TEORIJE IGARA**
Fakultet na kojem je rad odbranjen	**Elektrotehnički fakultet – Podgorica**

UDK, OCJENA I ODBRANA MAGISTARSKOG RADA

Datum prijave magistarskog rada	**30.05.2014**
Datum sjednice vijeća na kojoj je prihvaćena tema	**03.07.2014**
Komisija za ocjenu teme i podobnosti magistranda	**05.06.2014**
Mentor	**Prof. dr Vesna Popović-Bugarin**
Komisija za ocjenu rada	**Prof. dr Igor Đurović, ETF Podgorica, predsjednik,** **Prof. dr Vesna Popović-Bugarin, ETF Podgorica, mentor,** **Doc. dr Saša Mujović, ETF Podgorica, član.**
Komisija za odbranu rada	**Prof. dr Igor Đurović, ETF Podgorica, predsjednik,** **Prof. dr Vesna Popović-Bugarin, ETF Podgorica, mentor,** **Doc. dr Saša Mujović, ETF Podgorica, član.**
Lektor	
Datum odbrane	**07.10.2016**
Datum promocije	

Predgovor

Pametne mreže predstavljaju temelj savremenog elektroenergetskog sistema. Jedna od njihovih glavnih prednosti jeste mogućnost upravljanja potrošnjom električne energije putem specijalizovanih sistema. Svaki dobar sistem za upravljanje potražnjom/potrošnjom električne energije u obzir uzima, ne samo zahtjeve krajnjih korisnika, već i njihov međusobni uticaj, te se na taj način može pristupiti obuhvatnijoj analizi problema odnosa maksimalnog i srednjeg opterećenja mreže koji zavisi od rasporeda ukupnog opterećenja mreže. Na ovaj način se otvara mogućnost korišćenja teorije igara u optimizaciji potrošnje električne energije. Optimizacioni algoritmi imaju za cilj određivanje optimalnog rasporeda potrošnje električne energije za sva domaćinstva, a uz zadovoljavanje potreba domaćinstava. Sve ovo je uticalo da se veliki broj istraživača okrene analizi ovakvih algoritama i načinima njihove modifikacije, a u cilju dobijanja što boljih rezultata optimizacije.

Sažetak

Algoritmi za automatsko upravljanje opterećenjem u pametnim elektrodistributivnim mrežama imaju za cilj smanjenje iznosa koji potrošači plaćaju za utrošenu električnu energiju, ali i povećanje efikasnosti elektrodistributivne mreže u smislu smanjenja odnosa maksimalnog i srednjeg nivoa opterećenja mreže u toku 24h. Smisao algoritama za optimizaciju jeste utvrđivanje rasporeda aktivacije uređaja uz zadata ograničenja koja se odnose na: dozvoljeno vrijeme aktivacije uređaja, potrebno vrijeme funkcionisanja, kao i količinu potrebne električne energije. U magistarskoj tezi je analizirana mogućnost modifikacije postojećih optimizacionih algoritama u cilju njihove primjene uz korišćenje linearne funkcije cijene koja je aktuelna u Crnoj Gori. Takođe su analizirani i različiti načini računanja cijene utrošene električne energije koju potrošači plaćaju. Svi analizirani algoritmi koriste osnovne principe teorije igara kako bi, ne otkrivajući detalje o potrošnji i time štiteći privatnost potrošača, odredili najbolji raspored potrošnje električne energije. Koncept rješenja igre u teoriji igara je Nash-ov ekvilibrijum. Njegova primjena sankcioniše bilo kakvu vrstu varanja pojedinačnih potrošača, jer nijedan igrač ne može da profitira promjenom svoje strategije (rasporeda potrošnje električne energije) pod pretpostavkom da ostali potrošači ne promjene svoje strategije. U tezi su date realizacije analiziranih i predloženih algoritama, kao i rezultati optimizacije uz ograničavanje perioda aktivacije uređaja sa kliznim vremenom aktivacije na vrijeme niže tarife, a sve u cilju postizanja što boljih performansi algoritma za optimizaciju u uslovima koji se najčešće srijeću u praksi u Crnoj Gori.

Abstract

Algorithms for automatic load management in smart electric power distribution networks aim at reducing the amount that customers pay for consumed electricity, but also increasing the grid effiiciency in terms of reducing peak-to-average ratio in load demand within 24h. Optimization algorithms are focused on determining the energy consumption schedules with previously determined constraints that refer to: time interval allowed for activation of appliance, time interval required for operation of appliances, as well as the amount of energy needed for appliances. This thesis will analyse the possibility of modification of existing optimization algorithms in order to implement them with the use of actual (linear) cost function. Different ways of defining the cost function that customers pay for electricity consumption will be also analyzed. All the analysed algorithms use the basic principles of game theory in order to define the best electricity consumption schedule by not revealing details of consumption, thus protecting the privacy of customers. The Nash equilibrium is a solution concept in game theory. Its application sanctions any kind of cheating of individual customers, since no player can’t benefit by changing his or her strategy (electricity consumption schedule), assuming that other customers do not change their own strategies. The thesis contains the realization of proposed and analyzed algorithms, as well as the optimization results with limitation of activation period of shiftable appliances to the low peak period of day, and all of that in order to obtain the best possible algorithm optimization results under the terms that are usually encountered in practice in Montenegro.

Sadržaj

Uvod

Pametna mreža predstavlja interaktivnu mrežu upravljanja električnom energijom, odnosno električnu mrežu koja inteligentno integriše aktivnosti svih korisnika koji su na nju spojeni, proizvođača, potrošača i onih koji su i jedno i drugo, a sve u cilju sigurne isporuke električne energije visokog kvaliteta. Sve one olakšice svakodnevnog života o kojima su potrošači električne energije nekada mogli samo da sanjaju, sada su im na dohvat ruke. Pomoću naizgled jednostavnog principa funkcionisanja pametna mreža ima za cilj da potrošačima obezbijedi što sigurniju i kvalitetniju isporuku električne energije. Jednostavno prikazan princip funkcionisanja je sledeći: pametna mreža omogućava elektranama da komuniciraju sa podstanicama, podstanicama da komuniciraju sa domaćinstvima, a domaćinstvima da komuniciraju sa električnim uređajima. Sve informacije prikupljene na ovaj način su na raspolaganju elektrodistributivnoj kompaniji koja ih koristi da donese zaključke o tome gdje, kada i kolika količina električne energije je potrebna i na koji način se ona može sigurno i kvalitetno transportovati. Oslonac pametne mreže predstavljaju 'pametni' uređaji, napredni softver i dvosmjerna komunikacija. Ključni dio cijelog sistema jeste mogućnost 'proticanja' podataka u oba smjera, i to od potrošača električne energije do snabdijevača električnom energijom i obratno. Dok su senzori postavljeni duž prenosnih linija, dio koji pametnu mrežu zapravo čini pametnom. Senzori služe za prikupljanje informacija, obezbjeđujući distributerima stalan nadzor cjelokupne distributivne mreže u cilju što brže i kvalitetnije reakcije na bilo kakve promjene u njoj. Oni predstavljaju ključ dostizanja maksimalnih mogućnosti i kapaciteta pametne mreže jer su isti neophodni kako bi pametnoj mreži omogućili dobijanje podataka u realnom vremenu („real – time information“). Zasigurno, 'najvidljiviji' i najzastupljeniji dio pametne mreže čine pametna brojila. Pametna brojila su instalirana kod svakog potrošača pojedinačno, te stoga sam način rada i efikasnost funkcionisanja brojila utiče na kvalitet života svakoga od njih. Pametna brojila predstavljaju vezu između snabdijevača i potrošača električne energije. Potrošači od pametnih brojila očekuju detaljne i pravovremene informacije koje će ih uputiti u to kako da upravljaju potrošnjom električne energije u cilju smanjenja troškova, ali i u cilju smanjenja negativnog uticaja neracionalnog korišćenja električne energije na okruženje. Sa druge strane distributivne kompanije će informacije dobijene od pametnih brojila iskoristiti za što bolje upravljanje snabdijevanjem električne energije, u zavisnosti od potražnje. Pomoću pametnih brojila potrošači u svakom trenutku imaju uvid kada, koliko i po kojoj cijeni koriste električnu energiju, što im omogućava da pomjeranjem potrošnje iz časova više u časove niže tarife značajno uštede. Pomenuta funkcionalnost još uvjek nije aktivna kod nas, dok u nekim drugim zemljama, prije svega Njemačkoj, Švedskoj, Belgiji, Austriji i td. potrošači imaju mogućnost da uživaju kako u ovoj tako i u mnogim drugim razvijenim karakteristikama pametnih brojila.

Pored svega navedenog, najveća prednost pametne mreže je ipak mogućnost upravljanja potrošnjom električne energije putem specijalizovanih sistema za upravljanje potražnjom električne energije DSM-a (engl. Demand Side Management). Kako bi se pristupilo sveobuhvatnoj analizi problema odnosa maksimalnog i srednjeg opterećenja mreže PAR-a (engl. Peak to Average Ratio), koji zavisi od rasporeda ukupnog opterećenja mreže, kvalitetan DSM sistem mora uzeti u obzir, ne samo zahtijeve krajnjih korisnika, već i njihov međusobni uticaj. Analiza međusobnog uticaja krajnjih korisnika nas dalje usmjerava ka korišćenju osnovnih koncepata teorije igara, koja za cilj ima da odredi ponašanje, djelovanje, akcije i odluke učesnika igre koje će im donijeti najbolji profit. Uzevši u obzir ove činjenice, korišćenje teorije igara u analizi kontrole i upravljanja potrošnjom električne energije ima puni smisao. Potrošači – učesnici igre, sa svojim strategijama – dnevnim rasporedom opterećenja, čine osnovu igre optimizacije rasporeda potrošnje električne energije. DSM sistemi za upravljanje potrošnjom električne energije koriste različite algoritme u zavisnosti od ciljeva koje žele da postignu. Glavni ciljevi algoritama za upravljanje potražnjom/potrošnjom električne energije su smanjenje iznosa koji potrošači plaćaju za utrošenu električnu energiju i dobijanje što nižeg odnosa maksimalnog i srednjeg opterećenja mreže u toku dana, određivanjem optimalnog rasporeda potrošnje električne energije za sva domaćinstva, a uz zadovoljavanje potreba domaćinstava. Sve ovo je uticalo da se veliki broj naučnika usmjeri upravo ka istraživanju ovakvih algoritama i načinima njihove modifikacije, a u cilju dobijanja što boljih rezultata optimizacije. Ključni faktor koji određuje kvalitet rezultata optimizacionih algoritama je funkcija cijene električne energije, tačnije način njenog određivanja.

U ovom smislu u tezi su najprije predstavljeni rezultati koncepta upravljanja opterećenjem elektroenergetske mreže realizacijom ideje iz [1] u kojem je funkcija cijene kvadratna. Cilj algoritma jeste određivanje najboljeg (optimizovanog) rasporeda potrošnje električne energije za svaki uređaj svakog domaćinstva. Algoritam ima uticaja samo na uređaje sa vremenom aktivacije koje se može pomjerati (mašina za veš, mašina za suđe itd.), a ne i na uređaje sa vremenski fiksiranim vremenom aktivacije (frižider, sijalica i td.). Rezultati optimizacije pokazuju da bi primjenom ovakvog algoritma došlo do smanjenja PAR-a, smanjenja cijene koju bi potrošači plaćali, kao i do poravnjanja pikova (vršnog opterećenja) u mreži u časovima više tarife.

Kako bi se algoritam prilagodio načinu računanja cijene utrošene električne energije u Crnoj Gori i učinio prihvatljivim, modifikovan je na način da je umjesto korišćenja kvadratne funkcije cijene u tezi predloženo i korišćenje linearne funkcije cijene. Koeficijent aktuelne linearne funkcije cijene zavisi od doba dana u kojem korisnici aktiviraju svoje uređaje, tj. od niže i više tarife. Elemenat teorije igara se uvodi zavisnošću koeficijenta linearne funkcije cijene kako od časova niže i više tarife tako i od pojave pikova u časovima niže tarife odnosno od ukupne potrošnje domaćinstva u datom času. Ova modifikacija koeficijenta linearnosti je analizirana jer ukoliko isti zavisi samo od perioda dana, tačnije samo od niže i više tarife, postoji velika mogućnost da se ne iskoristi veliki dio perioda niže tarife, kao i da dođe do pojave pikova u početnim časovima niže tarife kao što se u praksi najčešće i dešava, a ilustrovano je u jednom od primjera. Ovakvom realizacijom se vrlo malo odstupa od trenutnog načina računanja cijene električne energije. Dakle, predloženom modifikacijom cijena se mijenja u zavisnosti, ne samo od doba dana, već i od prekoračenja srednje vrijednosti opterećenja u toku 24h, kako bi se spriječilo pojavljivanje pika u časovima niže tarife. Na ovaj način cijena koju potrošač plaća zavisi od potrošnje svih domaćinstava, čime se uvode elementi teorije igara. Ovaj način realizacije ukida linearnost funkcije cijene i daje konveksnu funkciju cijene. Rezultati optimizacije pokazuju da će uz smanjenje PAR-a i uz smanjenje cijene koju potrošači plaćaju doći i do blaže izražene pojave pikova u časovima niže tarife.

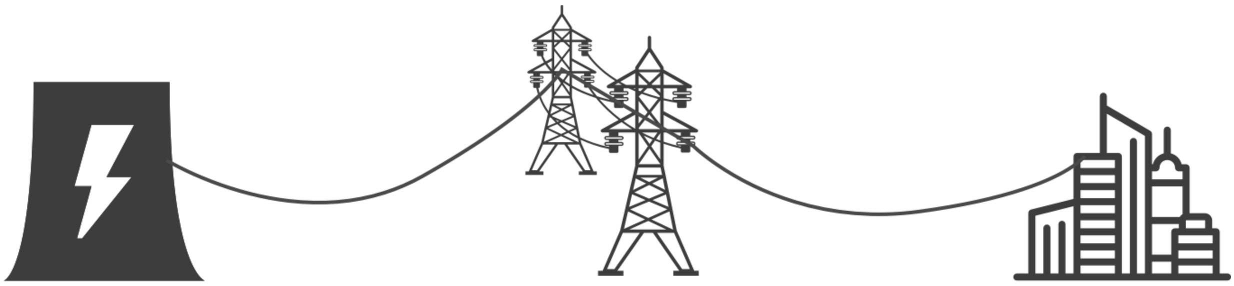
Osim pomenutih modifikacija funkcije cijene električne energije u tezi je analiziran uticaj promjene perioda aktivacije pojedinačnih uređaja domaćinstava. Naime, ukoliko bi sva domaćinstva, uređajima sa periodom aktivacije koje se može mijenjati, ograničila dozvoljeni period aktivacije na sve sate niže tarife, što samo po sebi predstavlja realnu situaciju, dobiće se dobri rezultati optimizacije, koji se prije svega ogledaju u izraženom poravnanju pikova u časovima niže tarife, ali i smanjenju iznosa koji potrošači plaćaju.

Uzevši sve pomenute modifikacije u obzir jasno je da je za najbolje rezultate optimizacionog algoritma od presudnog značaja detaljna i pažljiva analiza primjene: modifikacija funkcije cijene (može biti kvadratna ili linearna, realizovana na različite načine), dužine perioda moguće aktivacije uređaja, perioda dana u kojem se vrši aktivacija (viša ili niža tarifa), različitih kriterijuma minimizacije, kao i kombinacije svih pomenutih uticaja.

Rad je organizovan u 8 glava. U Glavi 1 su dati osnovni principi funkcionisanja Smart Grid-a, ali i osvrt na posledice uticaja njene integracije na savremeni način života čovjeka. U Glavi 2 je data detaljna analiza načina rada sistema za upravljanje potražnjom/potrošnjom električne energije. U Glavi 3 je analizirana Teorija igara, kao matematička disciplina, i njena efikasna primjena u upravljanju opterećenjem u pametnim elektrodistributivnim mrežama. Veliki broj optimizacionih metoda i upotreba svakog od njih u zavisnosti od definicije optimizacionog problema je data u Glavi 4. Osnovni algoritam za optimizaciju rasporeda potrošnje električne energije prikazan je u Glavi 5. Glava 6 ilustruje primjenu i performanse predloženih optimizacionih metoda kroz nekoliko primjera. Nakon toga je dat kratak zaključak, kodovi korišćeni u pojedinim simulacijama, kao i spisak literature korišćene u tezi.

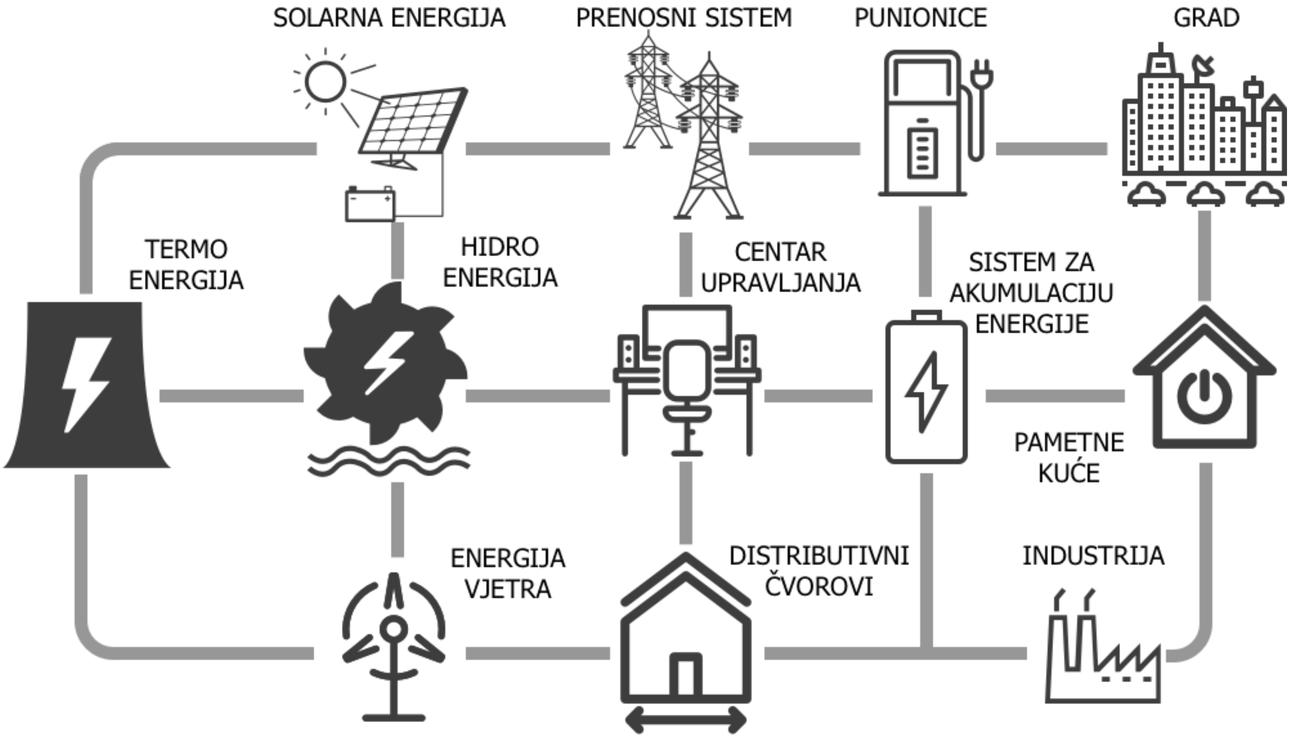
1 Smart Grid

Tradicionalni elektro-energetski sistemi su se prije izgradnje pametne mreže bazirali na jednosmjernom toku električne energije i jednostavnim interakcijama, Slika 1.1



Slika 1.1 Jednosmjerni tok električne energije

Uvođenjem pametne mreže ostvaruje se mogućnost protoka električne energije u dva smjera kao i interakcije između više vrsta korisnika električne energije, Slika 1.2.

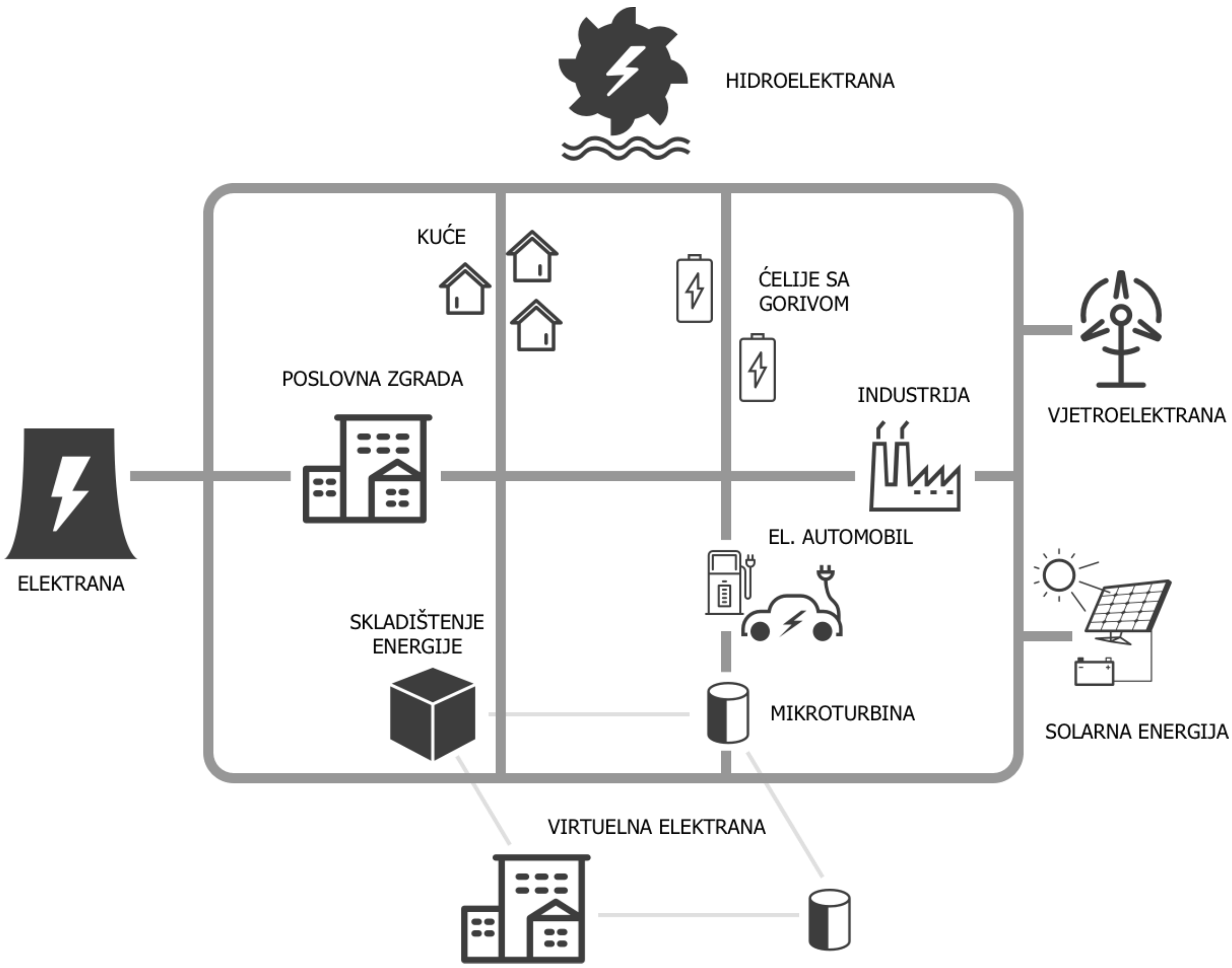


Slika 1.2 Prikaz dvosmjernog toka električne energije uz interakcije između više vrsta korisnika

Pametna mreža je mreža budućnosti [2]-[4]. Pametna mreža, 'smart grid', predstavlja prekretnicu elektrodistributivnog razvoja 21. vijeka. Ono oko čega se svi koji se na bilo koji način bave razvojem elektro-energetske mreže jednoglasno slažu jeste da postojeća elektro-energetska mreža dostiže svoje limite i da je potrebno stvarati novu, efikasniju, pouzdaniju i bezbjedniju. Potražnja električne energije ima globalnu tendenciju rasta i očekuje se da će se do 2030. godine čak udvostručiti. Paralelno sa tim javlja se i problem snabdijevanja potrošača tolikom količinom električne energije. Sve ovo je uticalo da se ozbiljno radi na poboljšanju svih aspekata postojeće elektro-energetske mreže, kao i na što efikasnije uključivanje alternativnih izvora električne energije u postojeće kapacitete. U cilju aktivnog monitoringa cjelokupne elektro-energetske mreže obavljaju se mnogobrojne aktivnosti koje bi za krajnji ishod trebale da omoguće potrošačima potrošnju električne energije u periodu najmanjeg opterećenja (off-peak režim) mreže. Jedan od načina da se ovo postigne jeste pomoću sistema za upravljanje potrošnjom električne energije, koristeći pametne uređaje i napredne sisteme za mjerenje. Elektro-energetska mreža razvijena na ovaj način, koja će služiti za postizanje pomenutih ciljeva, jeste pametna mreža (smart grid) [5]. Pametna mreža obezbjeđuje efikasan sistem distribucije koristeći digitalnu tehnologiju, eliminišući gubitak energije i poboljšavajući pouzdanost. Pametnu mrežu stoga prije svega karakteriše visoka fleksibilnost, energetska efikasnost i isplativost. Ona predstavlja modernizovanu elektro-energetsku mrežu koja obuhvata različitu opremu za proizvodnju električne energije, prenosne i distributivne mreže, elektro opremu i opremu za skladištenje energije. Oprema za skladištenje energije služi za rješavanje problema preopterećenja i nekonzistentnosti isporuke električne energije (što je svojstveno radu obnovljivih izvora električne energije). Električna energija se skladišti u električnim baterijama i u slučaju ispada ili povećane potrošnje, trenutno se ubacuje u mrežu. Pametna mreža je visoko integrisana mreža koja kombinuje hardversku i softversku mrežu sa modernom naprednom tehnologijom mjerenja senzorima, mrežnom tehnologijom, komunikacionom tehnologijom, kompjuterskom tehnologijom, automatizacijom i tehnologijom inteligentne kontrole [5].

Slika 1.3 prikazuje protok informacija koji je u pametnoj mreži siguran i fleksibilan i odvija se u realnom vremenu. Sve ovo omogućava pametnoj mreži da nadgleda status napajanja svih uređaja, kontroliše te uređaje, i da se prilagodi potrebama tržišta električne energije. Ovaj nivo integracije sistema i optimalna ravnoteža između proizvodnje, prenosa i distribucije pruža prednost u potrošnji električne energije i kompatibilan je sa različitim oblicima energije i skladištenja (uključujući i obnovljive izvore energije).

Pametna mreža predstavlja održiv, pouzdan i ekonomičan način upravljanja električnom energijom, koji se zasniva na naprednoj infrastrukturi i čiji je zadatak da olakša integraciju svih svojih djelova. Pametna mreža vrši isporuku električne energije od proizvođača do potrošača putem dvosmjerne komunikacione linije, ujedno kontrolišući uređaje potrošača u cilju uštede električne energije, smanjenja troškova i povećanja pouzdanosti i transparentnosti cjelokupne mreže. Izgradnju pametne mreže čine mogućom senzori i različiti uređaji za mjerenje i kontrolu koji bi dvosmjernom komunikacionom linijom bili povezani sa svim djelovima elektro-energetske mreže prikupljajući informacije, kako o mreži, tako i o krajnjim korisnicima. Na ovaj način prikupljene informacije bi proticale u oba smjera, od mreže ka korisnicima i obratno, omogućivši objema stranama da brzo i efikasno reaguju na bilo kakve promjene ili zahtjeve mreže, tj. korisnika [6]. Prvi korak ka razvoju pametne mreže jeste razvoj infrastrukture sistema za automatsko mjerenje koji bi pomoću informacionog sistema automatski očitavao brojila i na taj način obezbjeđivao detaljne informacije i procjene o potrošnji električne energije svakog potrošača pojedinačno [7].

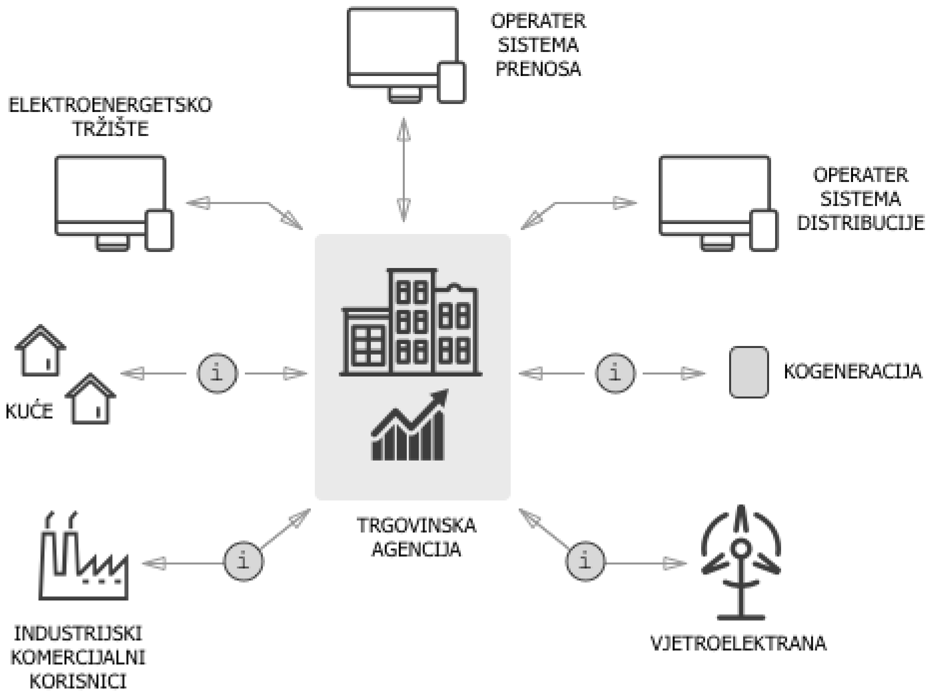


Slika 1.3 Protok informacija (u smjeru kazaljke na satu): elektrana, poslovna zgrada, domaćinstva, kogeneracija (CHP), hidroelektrana, ćelije sa gorivom, vjetroelektrana, solarna elektrana, industrija, punjenje električnih automobila, mikroturbina, virtuelna elektrana, skladištenje energije.

Automatizacija omogućava praćenje i kontrolu svih mrežnih čvorišta i korisnika kako bi se obezbjedio dvosmjerni protok informacija i električne energije iz elektrane prema svim čvorištima u toku prenosa i distribucije. Precizno napajanje, komplementarno napajanje, visok stepen iskorišćenosti energije, visok kvalitet električne energije, sigurnost snabdijevanja električnom energijom i štednja električne energije su pokazatelji da bi pametna mreža predstavljala čist, efikasan, bezbjedan i pouzdan sistem, Slika 1.4 Prikaz integracije sistema za proizvodnju, prenos i distribuciju.

Kogeneracija, prikazana na Slika 1.4, je postupak istovremene proizvodnje električne energije i toplote iz iste količine goriva. Pored električne energije, dobija se i izvjesna količina toplotne energije, što omogućava podizanje stepena iskorišćenosti hemijske energije goriva.

Projekat izgradnje pametne mreže je bez sumnje komplikovan i zahtjeva velika ulaganja, s obzirom da podrazumijeva ozbiljne izmjene cjelokupne mrežne infrastrukture. Osim troškova, tu je i pitanje saglasnosti i prihvatanja svih izmjena i uslova korišćenja od strane krajnjih potrošača, zatim nalaženje investitora, ekonomski uticaj, uvođenje vladinih regulativa, kao i niz problema koje je potrebno detaljno analizirati i riješiti tako da i snabdijevači i potrošači budu zadovoljni krajnjim ishodom. Za rješavanje svih pomenutih pitanja od ključnog je značaja razvoj informacionih tehnologija, pametnih uređaja (brojila, senzora i td.), sistema za automatsko upravljanje pametnim uređajima, sistema alternativnih izvora električne energije i td.



Slika 1.4 Prikaz integracije sistema za proizvodnju, prenos i distribuciju

Proizvodnja električne energije predstavlja najveći pojedinačni izvor emisije ugljen dioksida koji ima veliki uticaj na klimatske promjene. Kako bi se ublažile posledice klimatskih promjena nužne su značajne i krupne promjene u trenutnom elektro-energetskom sistemu kako bi isti mogao da se suprotstavi izazovima rasta potražnje električne energije, ali i da se suoči sa potrebom redukcije emisije ugljen-dioksida. Kako je izgrađen prije više od stotinu godina, elektro-energetski sistem predstavlja jednu od najznačajnijih komponenti infrastrukture od koje moderno društvo zavisi u velikoj mjeri.

Činjenica je da se elektro-energetska mreža u Crnoj Gori veoma malo razvila u proteklih nekoliko decenija. Usljed toga današnja elektro-energetska mreža se suočava sa mnogobrojnim problemima kao što su starost svih djelova elektro-energetskog sistema, neefikasnost isporuke, prekidi u mreži itd. Samim tim, kao glavni problem nameće se nemogućnost mreže da svojim kapacitetima i efikasnošću zadovolji sve veću potražnju i zahtijeve krajnjih korisnika. Pametna mreža se definiše i kao modernizacija sistema za isporuku električne energije, koja obuhvata monitoring, zaštitu i automatsku optimizaciju operacija svih djelova sistema koji su međusobno povezani. Pametna mreža se sastoji od mnoštva različitih segmenata, pa samim tim i različitih tehnologija.

Infrastruktura za napredno mjerenje podrazumijeva postojanje digitalnog električnog pametnog brojila lociranog kod potrošača na distributivnoj strani mreže, koje omogućava dvosmjernu komunikaciju tj. protok podataka u oba smjera od potrošača ka snabdijevaču i obratno, kao i komunikacionu infrastrukturu za prenos generisanih podataka. Ključno pitanje ovog dijela pametne mreže jeste na koji način će pametna brojila komunicirati jedno sa drugim, kao i sa ostalim djelovima pametne mreže. U radu [1] na kojem se zasniva teza za ovu vrstu komunikacije predložen je LAN, ali i neki drugi komunikacioni metod dolazi u obzir (PLC itd).

Do sada su snabdijevači imali vrlo ograničen uvid u performanse mreže van dometa trafostanica. Stoga su se i odluke o napajanju distributivne mreže električnom energijom koje su oni donosili zasnivale na nepotpunim informacijama, što samo po sebi rezultuje gubicima u distributivnoj mreži kao i napajanju krajnjih potrošača energijom slabijeg kvaliteta. Tehnologija pametne mreže je u mogućnosti da snabdijevačima obezbijedi kompletnu vidljivost elektro-energetske mreže i samim tim njene performanse podigne na mnogo veći nivo. Optimizacija mreže obuhvata ugradnju senzora, komunikacionih infrastruktura i informacionih tehnologija koje će pomoći u optimizaciji performansi mreže u realnom vremenu i poboljšati njenu pouzdanost, efikasnost i bezbijednost.

Jedno od glavnih pitanja u istraživanjima pametne mreže jeste kako podstaći i ohrabriti potrošače da efikasnije koriste električnu energiju. Činjenica je da pametna mreža, dizajnirana tako da ispuni četiri osnovna zahtijeva globalnog društva i to: kapacitivnost, pouzdanost, efikasnost i održivost, predstavlja budućnost elektro-energetskog sistema.

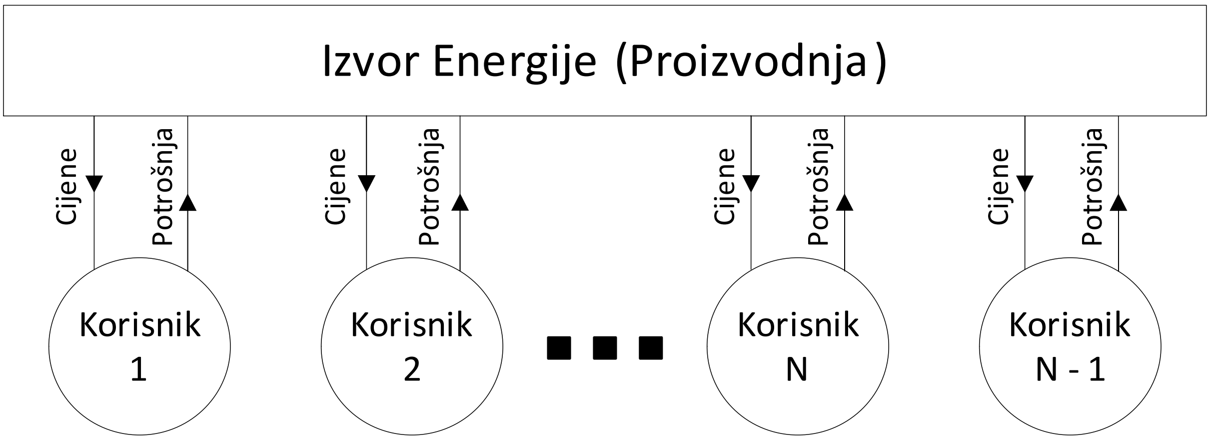
2 Sistem za upravljanje potražnjom električne energije (DSM)

Pomoću sistema za upravljanje potražnjom električne energije (DSM) [6],[8], pametna mreža snabdijevačima električne energije omogućava, ne samo da prate kolika je njena potražnja u određenom periodu dana, već i da upravljaju njome. Njihov zadatak je da, bez izgradnje novih sistema za proizvodnju i prenos električne energije, što efikasnije iskoriste raspoloživu električnu energiju. DSM obuhvata planiranje, implementaciju i monitoring svih aktivnosti elektro-energetske kompanije. Te aktivnosti na indirektan način određuju način korišćenja električne energije od strane potrošača, što bi za posledicu trebalo da ima poboljšanje performansi elektro-energetskog sistema. Velika je korist koja se može postići primjenom efikasnih i odgovarajućih DSM programa. Iz ugla elektro-energetskih kompanija, one mogu smanjiti potrošnju električne energije i samim tim odložiti izgradnju novih elektrana i dalekovoda, tako što će smanjiti pikove koji su kratkotrajni a koji zahtijevaju povećanje kapaciteta prenosnog sistema. Takođe, veliki je broj koristi sa ekonomskog aspekta, kao što su redukovanje kapitala, zatim redukovanje gubitaka na mreži, povećanje efikasnosti sistema itd. Iz ugla potrošača DSM program može značajno smanjiti iznose njihovih računa i poboljšati cjelokupnu uslugu. Sistem za upravljanje potražnjom električne energije čine energetska efikasnost i odziv na sistem za upravljanje potražnjom električne energije. Energetska efikasnost je mjera redukovanja potrošnje električne energije. Odziv na sistem za upravljanje potražnjom električne energije obuhvata skup akcija preduzetih od strane potrošača, kao odgovor na uslove postavljene od strane elektro-energetskog sistema (period vršnog opterećenja mreže, zagušenje mreže, period više i niže tarife i td.). Glavni cilj sistema za upravljanje potražnjom električne energije jeste da podstakne potrošače da smanje potrošnju u periodu visokog opterećenja mreže ili da je pomjere iz perioda visokog u period nižeg opterećenja mreže, a sve u cilju smanjenja cijene koju plaćaju za električnu energiju i dobijanja što nižeg PAR-a, što bi istovremeno učinilo stabilnijim cjelokupan elektro-energetski sistem. Dakle, potrošači bi odluke o količini električne energije i rasporedu njene potrošnje, donosili na osnovu značajno većeg broja informacija.

Osim povećanja stabilnosti elektro-energetske mreže, kao i smanjenja cijene koju potrošači plaćaju za utrošenu električnu energiju, za razvoj države kao cjeline, postoji još niz prednosti uvođenja DSM sistema: redukcija zagađenosti vazduha, smanjenje zavisnosti od stranih izvora električne energije, stimulacija ekonomskog razvoja, otvaranje mogućnosti zapošljavanja u oblastima novih (‘pametnih’) tehnologija i td.

Porast koncentracije pametnih brojila, rasprostranjenost mrežne infrastrukture i inteligentna mreža osiguravaju elektro-energetskim kompanijama uvid u potrošnju električne energije u realnom vremenu. Usled toga pametna mreža obezbjeđuje vrlo pogodne okvire za implementaciju i razvoj DSM programa. Pametna mreža zahtijeva metode pomoću kojih se može postići balans između potražnje i snabdijevanja potrošača električnom energijom. Mnogi od ovih metoda najčešće zadovoljavaju ili interese snabdijevača ili interese potrošača, koji mogu biti u potpunom sukobu. Stoga je vrlo teško dizajnirati takav DSM-program koji uzima u obzir kako interese snabdijevača tako i interese njihovih potrošača. Jedna od metoda realizacije DSM-a jeste pristup direktne kontrole opterećenja. Ovaj pristup funkcioniše na osnovu dogovora između snabdijevača i krajnjih potrošača, na osnovu kojega snabdijevači daljinski kontrolišu rad, tj. potrošnju određenih uređaja u domaćinstvu. Međutim, glavna prepreka ovakvoj realizaciji može biti pitanje privatnosti potrošača, tačnije to da li su oni spremni da snabdijevačima dobrovoljno daju toliku količinu kontrole upravljanja. Alternativa ovoga pristupa je pametno tarifiranje. Pametnim tarifiranjem se usvajaju posebna pravila za računanje cijene električne energije kojima se potrošači podstiču da, u cilju smanjenja troškova, pojedinačno i dobrovoljno upravljaju svojim opterećenjima. Jedno od tih pravila je smanjenje potrošnje u časovima visokog opterećenja elektro-energetske mreže.

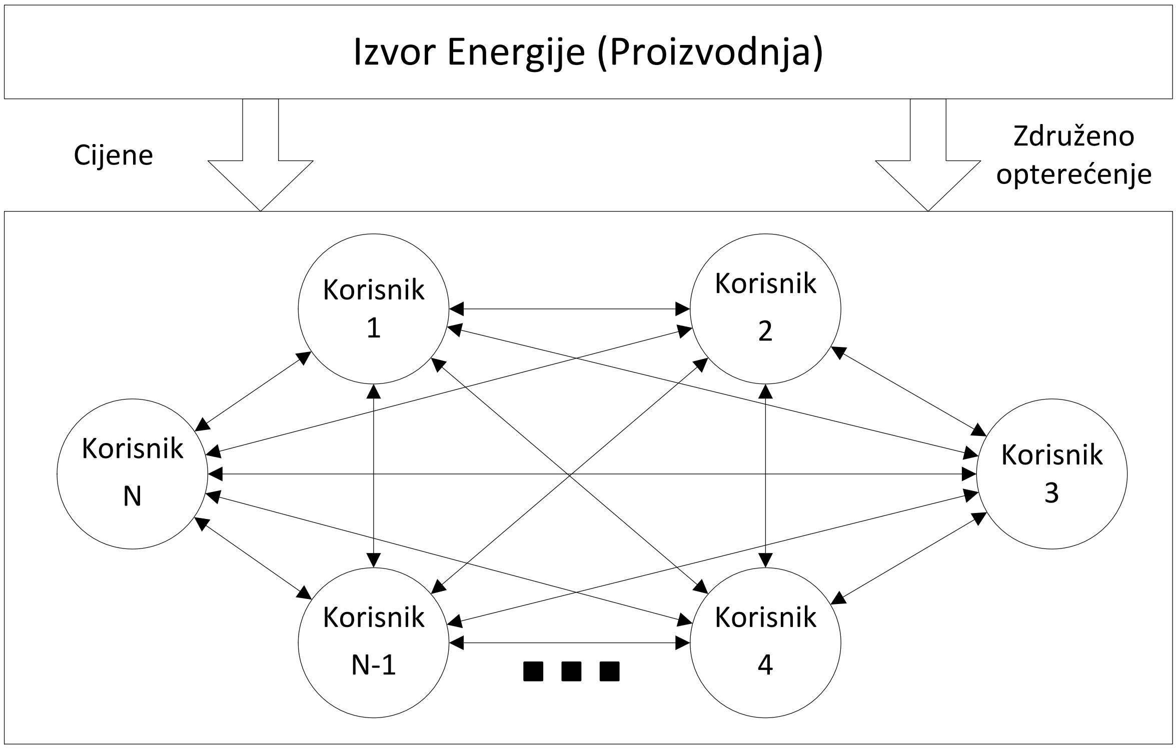
U kojoj god formi bio realizovan, DSM program bi trebao biti suštinski dio pametne mreže [8]. Većina sistema za automatsko upravljanje potrošnjom električne energije je razvijana za sistem u kojem se komunikacija vrši između snabdijevača i svakog krajnjeg potrošača - Slika 2.1.



Slika 2.1 Grafički prikaz sistema u kojem se komunikacija vrši između snabdijevača i svakog krajnjeg potrošača

Nedostatak razmjene informacija među korisnicima elektro-energetske mreže predstavlja glavnu prepreku ka potpunom iskorišćenju svih prednosti dobrog DSM-a. Uzevši u obzir prednosti pametne mreže, kao što je mogućnost interakcije svih potrošača, kao i potrošača i električne mreže, dobar DSM bi trebao uzeti u obzir, ne samo zahtjeve krajnjih korisnika, već i njihov uticaj međusobno. Takvom realizacijom može se analizirati i kontrolisati problem PAR-a, koji zavisi od rasporeda ukupnog opterećenja mreže - Slika 2.2

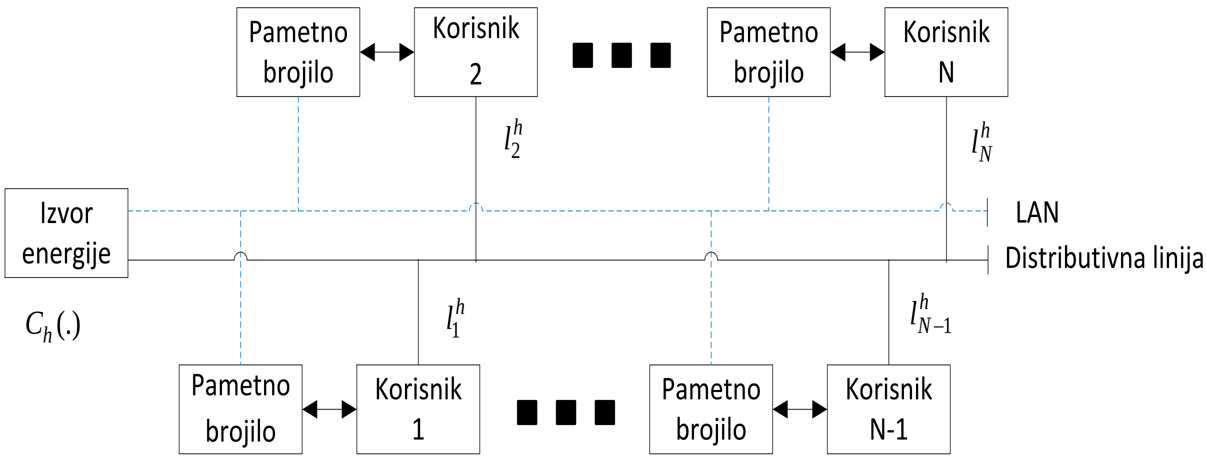
Sljedeće generacije DSM tehnologija će omogućiti potrošačima da odluke o potrošnji električne energije donose na osnovu mnogo većeg broja informacija, samim tim prilagođavajući period potrošnje i količinu potrošnje. U poslednje vrijeme kao jedno od atraktivnih rješenja DSM sistema javljaju se ona sa primjenom teorije igara [9]-[11]. Pristup teorije igara obično dozvoljava potrošačima da pregovaraju sa snabdijevačima dok ne dostignu određeni 'konsenzus' tj. tačku ekvilibrijuma u kojoj svi potrošači pojedinačno vjeruju da su izvukli maksimum iz pregovora. Do dostizanja takvog rješenja tj. ekvilibrijuma može proći određeno vrijeme, dok u nekim slučajevima takvo rješenje ne mora uopšte postojati.



Slika 2.2 Grafički prikaz sistema u kojem se komunikacija vrši između snabdijevača i svakog krajnjeg potrošača, kao i između potrošača međusobno

2.1 Modelovanje sistema za upravljanje potražnjom/potrošnjom električne energije

U tezi su najprije predstavljeni rezultati koncepta upravljanja opterećenjem elektro-energetske mreže 0 koji podrazumijeva da se model kojim možemo predstaviti pametni elektro-energetski sistem sastoji od većeg broja domaćinstava i jednog izvora električne energije povezanog na električnu mrežu - Slika 2.3



Slika 2.3 Blok dijagram pametnog sistema koji se sastoji od izvora električne energije, potrošača, distributivne linije napajanja i LAN-a

Pretpostavka je da se u svakom pametnom brojilu nalazi automatski optimizator električne potrošnje koji bi upravljao rasporedom potrošnje domaćinstava Slika 2.3. Svako pametno brojilo povezano je na liniju napajanja koja dolazi iz izvora električne energije. Pametna brojila su povezana i međusobno, kao i sa samim izvorom električne energije putem LAN-a ili nekim drugim komunikacionim putem, kao na primjer PLC-om (komunikacije vodovima energetske mreže). Upotreba linije za napajanje u svrhu razmjene informacija takođe predstavlja dobro i efikasno rješenje. Sve funkcionalnosti automatskog optimizatora električne energije služe brojilima da međusobno komuniciraju razmjenjujući informacije. U svakom optimizatoru bi se izvršavao algoritam koji za cilj ima određivanje najboljeg (optimizovanog) rasporeda potrošnje električne energije za svaki uređaj domaćinstva kojem pripada, smanjenje odnosa maksimalnog i minimalnog opterećenja mreže u toku dana, ali i smanjenje cijene koju potrošači plaćaju za utrošenu električnu energiju. Način računanja cijene koju potrošači plaćaju definisan je načinom realizacije funkcije cijene. U zavisnosti od tipa funkcije cijene, cijena koju pojedinačni potrošači plaćaju zavisi ili samo od sopstvenog ili i od rasporeda potrošnje svih ostalih domaćinstava. Upravo kroz ovaj način pametnog tarifiranja, koji podrazumijeva postojanje pametnih brojila sa automatskim optimizatorom električne energije, pa samim tim i međusobnu saradnju krajnjih potrošača, u sisteme za automatsko upravljanje potrošnjom električne energije uvodimo koncept teorije igara [11], [13]. Pametna elektro-energetska mreža se sastoji od velikog broja inteligentnih čvorova koji međusobno interaguju i komuniciraju sa ciljem da električnu energiju efikasno i pouzdano isporuče krajnjim potrošačima [14]. Sa nizom matematičkih alata koji omogućavaju detaljnu analizu kompleksnih interakcija između nezavisnih učesnika igre, teorija igara preuzima glavnu ulogu za dizajn i analizu pametne mreže, čineći analitički okvir u kojem će se efikasno stvarati temelji za njenu izgradnju. Da bi se krenulo u presjek i interakciju oblasti teorije igara i DSM sistema, potrebno je obrazložiti model kojim se predstavlja pametni elektro-energetski sistem i definisati određene pojmove.

Svako domaćinstvo $n \in N$, posjeduje određen broj uređaja $a \in A_n$ gdje je A_n skup uređaja domaćinstva n, dok N predstavlja ukupan broj domaćinstava. Za svaki od tih uređaja definiše se vektor rasporeda potrošnje električne energije

$$X_{n,a} = \left[x_{n,a}^1, \dots, x_{n,a}^h \right] \tag{2.1}$$

gdje je $x_{n,a}^h$ potrošnja uređaja a, domaćinstva n u času h. Posmatraju se 24 časa ($H = 24$).

Ukupna potrošnja n tog domaćinstva u času h je

$$l_n^h = \sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h, \tag{2.2}$$

Ukupna potrošnja svih domaćinstava u času h je

$$L_h = \sum_{n \in N} l_n^h. \tag{2.3}$$

PAR se računa po sledećoj formuli:

$$PAR = \frac{L_{peak}}{L_{avg}}, \tag{2.4}$$

gdje su: $L_{peak} = max\{L_h\}$.za $h \in H$ i $L_{avg} = \frac{1}{H}\sum_{h\in H} L_h$.

U svakom pametnom brojilu nalazi se optimizator čija je uloga određivanje rasporeda potrošnje svih uređaja tog domaćinstva u svakom času, tj. raspored članova vektora $x_{n,a}^{h}$, a sve u cilju minimizacije iznosa koji se plaća za utrošenu električnu energiju, a posredno i PAR-a. Optimizacija se vrši uzimajući u obzir zaštitu privatnosti potrošača, što je jedna od najbitnijih prednosti dobrih DSM-a i pametne mreže, i pod uslovima koje definišu sama domaćinstva. Privatnost potrošača se čuva tako što svaki potrošač objavljuje informacije o promjeni ukupne potrošnje električne energije u nekom času, a ne informacije o potrošnji pojedinačnih uređaja. X_n predstavlja skup tih uslova za pojedinačno domaćinstvo $n \in N$. Ovaj skup kojeg definiše svako domaćinstvo $n \in N$ predstavlja skup validnih rasporeda potrošnje n-tog domaćinstva, dok x_n predstavlja vektor rasporeda potrošnje svih uređaja domaćinstva n:

$$X_n = \left[x_n \left| \begin{array}{l} \sum_{h=\alpha_{n,a}}^{\beta_{n,a}} x_{n,a}^h = E_{n,a} \\ x_{n,a}^h = 0, \forall h \in H \setminus H_{n,a} \\ \gamma_{n,a}^{\min} \le x_{n,a}^h \le \gamma_{n,a}^{\max}, \forall h \in H_{n,a} \end{array} \right. \right] \tag{2.5}$$

Svako domaćinstvo za svaki uređaj definiše period dana u kojem bi uređaj trebao da radi, sa $\alpha_{n,a}$ je označen početni, a sa $\beta_{n,a}$ krajnji čas toga perioda. $E_{n,a}$ je ukupna dnevna potrošnja električne energije uređaja a, domaćinstva n. Ona mora biti smještena u dozvoljenom periodu, a jednaka nuli u periodu van njega. Potrošnja uređaja u času h mora biti veća od minimalne $\gamma_{n,a}^{min}$, a manja od maksimalne $\gamma_{n,a}^{max}$ potrošnje uređaja dok je isti u stanju pripravnosti (standby režim).

Kao što je rečeno, način definisanja funkcije cijene ima veliki uticaj na performanse algoritma za optimizaciju. Od toga da li je ona kvadratna, linearna ili nelinearna, da li je konveksna ili ne, kao i da li cijena koju pojedinačni potrošač plaća zavisi samo od njegovog rasporeda potrošnje ili i od rasporeda potrošnje svih ostalih potrošača, zavisi iznos koji će potrošači plaćati, raspored njihove potrošnje, ali i odnos maksimalnog i srednjeg dnevnog opterećenja (PAR). Funkcija cijene $C_h(L_h)$ predstavlja trošak generisanja ili distribuiranja električne energije od strane izvora električne energije u svakom času $h \in H$. Cijena koju pojedinačno domaćinstvo plaća za utrošenu električnu energiju može varirati u toku 24h (na primjer biti niža u večernjim, a viša u dnevnim časovima potrošnje). Uvode se dvije pretpostavke. Prva je da je su funkcije cijene rastuće, tj. da $\forall h \in H$ važi sledeća nejednakost:

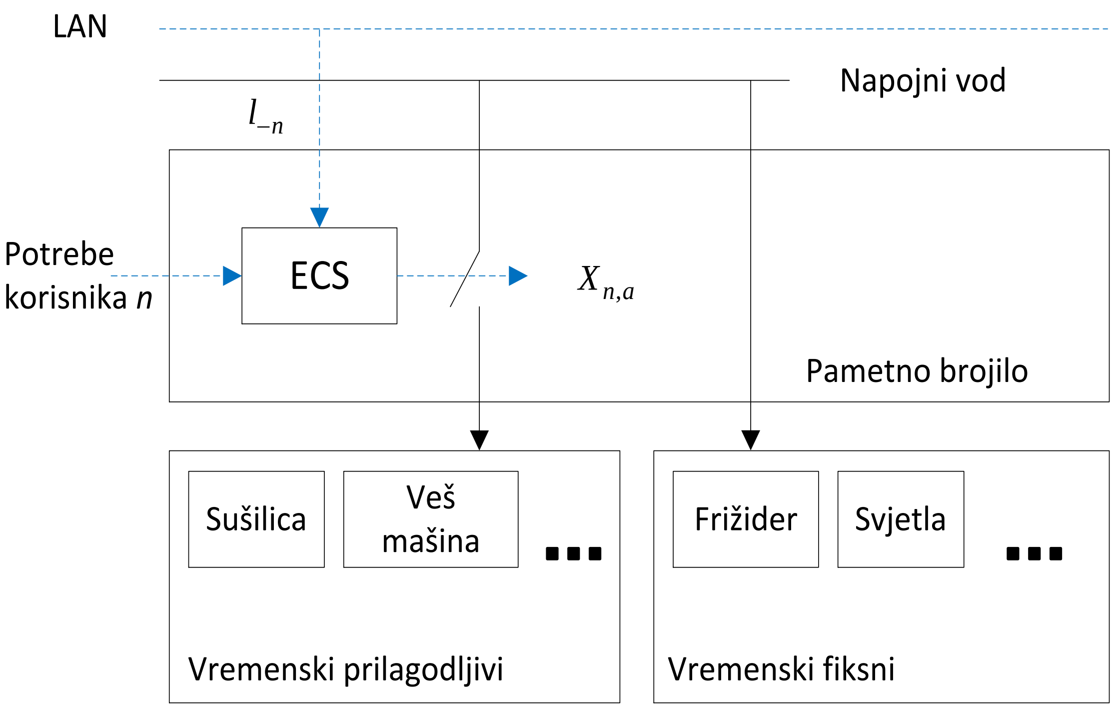
$$C_h(L_h) < C_h(L_h) \forall L_h < L_h \quad (2.6)$$

Iz gornje nejednakosti slijedi da cijena električne energije raste sa porastom ukupnog opterećenja elektro-energetske mreže od strane potrošača tj. porastom L_h.

Druga pretpostavka je da su funkcije cijene striktno konveksne, tačnije da $\forall h \in H$ i za bilo koja dva realna broja $L_h > 0$ i $L_h > 0$ veća od nule, kao i za bilo koji realan broj θ, gdje je $0 < \theta < 1$ važi sljedeća nejednakost:

$$C_h(\theta L_h + (1-\theta)L_h) < \theta C_h(L_h) + (1-\theta)C_h(L_h) \quad (2.7)$$

Funkcije cijene koje se koriste za realizaciju optimizacionog metoda u tezi su definisane na različit način, ali svaka od njih zadovoljava uslov striktne konveksnosti, što će kroz rad biti i dokazano.



Slika 2.4 Grafički prikaz pametnog brojila koje u svojoj strukturi sadrži automatski optimizator električne potrošnje

2.2 Optimizacioni problem

U tezi se koriste dva problema optimizacije [1]. Prvi je minimizacija PAR-a, koja doprinosi stabilnosti elektro-energetske mreže, a drugi minimizacije cijene koju potrošači plaćaju za utrošenu električnu energiju. Takođe je ustanovljena i zavisnost ova dva problema minimizacije i način njihove realizacije.

PAR se u funkciji vektora rasporeda potrošnje domaćinstava može zapisati na sledeći način:

$$PAR = \frac{H_{h\in H}^{\max}\left(\sum_{n\in N}\sum_{a\in A_n} x_{n,a}^{h}\right)}{\sum_{n\in N}\sum_{a\in A_n} E_{n,a}} \tag{2.8}$$

Naravno, poželjno je da vrijednost PAR-a bude što niža, jer niža vrijednost PAR-a ukazuje na pojavu nižih pikova u mreži što ukazuje na veću stabilnost. Uzevši u obzir ovako definisan PAR, efikasan raspored potrošnje električne energije predstavlja rješenje optimizacionog problema definisanog na sledeći način:

$$\min_{x_n\in X_n,\forall n\in N}\left\{\frac{H_{h\in H}^{\max}\left(\sum_{n\in N}\sum_{a\in A_n} x_{n,a}^{h}\right)}{\sum_{n\in N}\sum_{a\in A_n} E_{n,a}}\right\}. \tag{2.9}$$

U odnosu na rasporede potrošnje domaćinstava $x_1,\ldots,x_n$ kao optimizacionih promjenljivih, vrijednosti H i $\sum_{n\in N}\sum_{a\in A_n} E_{n,a}$ možemo smatrati konstantnim, pa se minimizacioni problem u tom slučaju svodi na:

$$\min_{x_n\in X_n,\forall n\in N}\ \max_{h\in H}\left(\sum_{n\in N}\sum_{a\in A_n} x_{n,a}^{h}\right). \tag{2.10}$$

Optimizacioni problem (2.10) je i dalje teško riješiti usled postojanja termina max u objektivnoj funkciji tj. funkciji koja se optimizuje. Stoga se uvodi pomoćna promjenljiva Γ i optimizacioni problem (2.10) se svodi na:

$$\max_{\Gamma,x_n\in X_n,\forall n\in N} \Gamma \tag{2.11}$$

gdje je $\Gamma \geq \sum_{n\in N}\sum_{a\in A_n} x_{n,a}^{h},\ \forall h\in H$

Ovako predstavljen minimizacioni problem je linearan i može imati više optimalnih rješenja, što znači da se minimalni PAR, u ukupnom opterećenju elektro-energetske mreže može postići uz različite rasporede potrošnje električne energije domaćinstava. Do pomenutih rješenja se dolazi primjenom IPM metoda (Interior Point Method - algoritam za rješavanje linearnih i nelinearnih konveksnih problema optimizacije) [15] kao što je u tezi i realizovano.

Drugi optimizacioni problem se odnosi na minimizaciju cijene električne energije koju potrošači plaćaju. U funkciji rasporeda potrošnje električne energije problem minimizacije cijene električne energije definišemo na sledeći način:

$$\max_{x_n \in X_n, \forall n \in N} \sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum\nolimits_{n \in N} \sum\nolimits_{a \in A_n} x_{n,a}^{h} \right) \tag{2.12}$$

Ovaj optimizacioni problem je konveksan, zavisi od cijene i riješava se pomoću IPM metoda. Uzimajući u obzir pretpostavku da je funkcija cijene striktno konveksna, ovaj optimizacioni problem ima jedinstveno rješenje, što ujedno predstavlja razliku između problema minimizacije cijene koju potrošači plaćaju i minimizacije PAR-a.

Prije definisanja igre optimizacije rasporeda potrošnje električne energije, kao i optimizacionog algoritma, moramo se upoznati sa osnovnim konceptom teorije igara, Nash-ovog ekvilibrijuma i njihovom primjenom u igri optimizacije [10].

3 Teorija igara

U svakodnevnom životu se suočavamo sa situacijama u kojima je donošenje odluka, kako onih od manje, tako i onih od veće važnosti, od ključnog značaja za dalji razvoj situacije. Koju ćemo odluku donijeti nekada zavisi od nas samih, i tada se pri donošenju odluka vodimo isključivo sopstvenom dobiti. Međutim, mnogo su češće situacije u kojima posledice odluka ne zavise samo od jedne strane. U tim situacijama je neophodna analiza međusobnog odnosa donosilaca odluka tj. potrebno je ustanoviti da li su oni u konfliktu ili ne. Do konflikta najčešće dolazi kada je posledica odluka takva da jedna strana ima veću korist nego ostale. Situacije djelimičnog ili potpunog konflikta između različitih donosilaca odluka nazivaju se igrama. U igri svaki igrač ima jednu potpunu informaciju koju stiče poznavanjem sopstvene situacije, dok svoje pretpostavke pravi na osnovu informacija o protivniku. Kako prolazi vrijeme i kako se igra razvija dobijaju se nove informacije na osnovu kojih se donose racionalne odluke. Racionalno ponašanje u nekoj konfliktnoj situaciji, u kojoj učestvuju dva ili više lica, značilo bi donošenje odluka koje doprinose maksimalnoj dobiti tj. ostvarenju unaprijed definisanog cilja. Svaka igra ima svoja pravila koja svi učesnici igre moraju poštovati ujedno imajući u vidu cilj koji žele ostvariti i shodno tome biraju svoje strategije u igri. Koncept teorije igara obezbjeđuje jezik za formulaciju, analizu i razumijevanje scenarija koji su posledica odabira različitih strategija [9],[11].

Teorija igara je matematička disciplina koja se koristi za modelovanje konfliktnih situacija. Upravo matematički temelj teorije igara je ono što je čini primarnim alatom za analizu procesa sa automatskim donošenjem odluka u interaktivnom okruženju. Ona predstavlja studiju konflikta i saradnje. Veoma često se kaže da je teorija igara primijenjena grana matematike koja je postavila osnove i okvire analitičke interpretacije problema odlučivanja u konfliktnim situacijama. Razmatranje situacija u kojima dva ili više subjekata donose odluke u uslovima sukoba interesa nazvano je teorijom igara zato što tipične primjere ovakvih situacija predstavljaju različite društvene igre, kao što su kartaške igre (poker, bridž, i sl.), šah, itd. Veći dio termina koji se koriste u okviru matematičke teorije igara sličan je terminologiji društvenih igara. Ipak, teorija igara ima mnogo širu primjenu i koristi se za modelovanje konfliktnih situacija u matematici, politici, ekonomiji, itd. Konflikt se u zavisnosti od različitih uslova pod kojima nastaje može definisati na različite načine. Konfliktna situacija je ona u kojoj dolazi do sukoba interesa, tačnije do konkurencije učesnika (igrača) u igri. Igra sama po sebi predstavlja matematički model realne konfliktne situacije. Osnovni cilj teorije igara je određivanje optimalnog ponašanja učesnika u igri. Bavi se analizom strategija, ujedno pokušavajući da definiše matematičke i logičke akcije koje bi igrači trebali preduzeti kako bi sebi obezbijedili najbolji profit. Strategija se definiše kao skup svih alternativa kojima igrač raspolaže pri donošenju odluke. Ona mora sadržati sve moguće slučajeve koji se mogu desiti u toku igre ili prilikom odlučivanja, a takođe mora uzeti u obzir svaku informaciju koju igrač može dobiti u toku igre. Svaki od igrača se odlučuje za jednu od strategija koje ima na raspolaganju i svaki od njih bira strategiju koja će mu donijeti najbolji profit. Cilj svakog učesnika igre jeste da postigne takvo rješenje koje će mu omogućiti da ostvari najbolji mogući rezultat. Ishod igre, tj. potencijalni rezultati učesnika se obično predstavljaju pomoću tzv. *funkcije plaćanja* ili cost funkcije koja predstavlja numerički izraz dobitaka tj. gubitaka učesnika neke igre. Igru može da igra i jedan igrač, međutim njena veza sa matematičkm teorijom dolazi do izražaja tek kada su u igru uključena dva ili više igrača. U tom slučaju profit svakog od učesnika igre neće zavisiti samo od sopstvene, već i od strategija svih ostalih igrača.

Iako je teorija igara utemeljena kao matematička disciplina, mnoge stvari postale su jasne tek kroz radove Džona Forbsa Neša Mlađeg (John Forbes Nash, Jr.). Njegovo kapitalno djelo bila je njegova doktorska disertacija iz 1949. godine koja je nosila naziv "Nekooperativne igre", a u kojoj je uveo pojam tačke ravnoteže, takozvanog ekvilibrijuma. Za analizu sistema za upravljanje potrošnjom električne energije od značaja su upravo nekooperativne igre [9],[10].

3.1 Osnovni koncepti i vrste igara

Igrači tj. učesnici igre mogu biti kako pojedinci tako i različite grupe. Bez obzira na broj učesnika u igri, cilj svakog od njih jeste da odabere strategiju koja će mu obezbjediti ostvarivanje najboljeg mogućeg rezultata. Ishod igre obično se predstavlja *funkcijom plaćanja* tj. *cost* funkcijom odnosno numeričkim izrazom dobitka tj. gubitka učesnika igre. Svaki od igrača na raspolaganju ima svoje strategije koje, najprostije rečeno, predstavljaju skup pravila ponašanja igrača. Pod pojmom strategija podrazumijevamo skup različitih alternativa za koje se igrači mogu opredijeliti. *Strategija* predstavlja centralni pojam u teoriji igara.

Postoje različite vrste igara i njihova podjela se vrši po različitim kriterijumima. Prema interesima igrača koji učestvuju u igri igre dijelimo na kooperativne, nekooperativne i igre sa kombinovanim motivima. Kooperativne igre su igre u kojima igrači imaju zajednički interes. Oni obrazuju koalicije koje im služe da međusobno usklade ponašanja i izaberu takve strategije koje će im omogućiti postizanje najboljih rezultata. U mnogim igrama su interesi igrača suprotni tj. ne postoji saradnja pri izboru poteza od strane igrača. Takve igre nazivamo nekooperativnm igrama. Kod nekooperativnih igara igrači učestvuju i donose odluke samostalno i svaka saradnja između igrača je dobrovoljna, ali ne i podrazumijevana.

Od većeg značaja za analizu sistema za upravljanje potrošnjom električne energije su nekooperativne igre. U tezi je predstavljena analiza i primjena nekooperativnih igara i Nash-ovog ekvilibrijuma kao načina njihovog rješavanja. Igre u kojima ima elemenata i kooperativnosti i nekooperativnosti istovremeno nazivaju se igre sa kombinovanim motivima. Podjela igara se može još vršiti prema broju igrača (igre sa jednim igračem, igre sa dva i igre sa proizvoljnim brojem igrača), kao i u zavisnosti od broja mogućih strategija koje postoje, na konačne u kojima svaki igrač ima konačan broj strategija i svaka partija igre se završava u konačno mnogo poteza, u suprotnom igra je beskonačna.

3.2 Formulisanje igre optimizacije rasporeda potrošnje električne energije

Glavni cilj prilikom formulisanja igre optimizacije rasporeda potrošnje električne energije je smanjiti cijenu električne energije koju potrošači plaćaju tj. rješiti optimizacioni problem prikazan jednačinom (2.12). Rješenje optimizacionog problema mora obezbijediti optimalno rješenje za sve potrošače (učesnike igre) pojedinačno, i to shodno njihovim rasporedima potrošnje električne energije. Takođe, mora imati mogućnost implementacije i sposobnost prilagođavanja svim promjenama koje se dešavaju u okviru sistema. Kako bi ovo bilo moguće rješenju optimizacionog problema (2.12) mora se pristupiti na nivou pametnog brojila (Slika 3.1) koristeći sve njegove napredne karakteristike i prednosti koje ono ima u odnosu na staro tradicionalno brojilo.

Slika 3.1: Izgled pametnog brojila

Od najvećeg značaja za pomenuti pristup je funkcionalnost pametnog brojila koja podrazumijeva postojanje ECS-a (Energy Consumption Scheduler - automatski optimizator električne potrošnje) u svakome od njih. Pomoću ove funkcionalnosti rješavanju optimizacionog problema se pristupa koristeći minimum informacija koje se razmjenjuju između potrošača i izvora električne energije.

Cilj automatskog optimizatora svakog pametnog brojila je da odredi raspored potrošnje električne energije svih uređaja domaćinstva, a shodno potrebama svih potrošača (učesnika igre optimizacije). Da bi igra određivanja optimalnog rasporeda potrošnje električne energije funkcionisala potrošači moraju biti podstaknuti na učešće u istoj, tačnije podstaknuti da koriste ECS karakteristike svoga pametnog brojila i da poštuju raspored potrošnje električne energije koji im odredi automatski optimizator.

Kako bi se formulisala igra određivanja optimalnog rasporeda potrošnje električne energije koja će zadovoljavati sve uslove tržišta električne energije uvedene su dvije pretpostavke. Za svakog potrošača $n \in N$, neka b_n označava dnevnu cijenu u eurima koju potrošač plaća na kraju svakog dana. Ova cijena mora podrazumijevati cijenu ukupne dnevne potrošnje električne energije n-tog potrošača, a osim toga mora uzeti u obzir i ukupne troškove elektro-energetskog sistema. Shodno tome prva pretpostavka je:

$$\sum_{n\in N} b_n \ge \sum_{h=1}^{H} C_h\left(\sum_{n\in N} l_n^h\right), \tag{3.1}$$

gdje je $l_n^h = \sum_{a\in A_n} x_{n,a}^h$, $l_n = \sum_{h\in H} l_n^h$.

Lijeva strana nejednakosti označava ukupnu dnevnu naplatu svim potrošačima od strane elektro-distributivne kompanije, dok desna strana nejednakosti označava ukupnu dnevnu cijenu utrošene električne energije. Smisao ove pretpostavke dobija pravo značenje uz uvođenje jednostavne oznake:

$$k \triangleq \frac{\sum_{n\in N} b_n}{\sum_{h=1}^{H} C_h\left(\sum_{n\in N} l_n^h\right)} \geq 1 . \tag{3.2}$$

Ukoliko je $k=1$ sistem je budžetno-balansiran, što znači da elektro-energetska kompanija potrošačima naplaćuje tačno onoliko koliko iznose njeni troškovi generisanja električne energije. Vrijednost $k>1$ bi ukazivala na profitiranje elektro-energetske kompanije, odnosno to bi značilo da je cijena koju potrošači plaćaju veća od troškova koje kompanija ima prilikom generisanja električne energije.

Druga uvedena pretpostavka je da svaki potrošač plaća shodno tome koliko potroši u odnosu na drugog potrošača, tačnije da onaj potrošač koji potroši više plaća veću cijenu i obratno, stoga za potrošače *m* i *n* slijedi:

$$\frac{b_n}{b_m} = \frac{\sum_{h=1}^{H} l_n^h}{\sum_{h=1}^{H} l_m^h}, \quad \forall n, m \in N . \tag{3.3}$$

Ukupna naplata zavisi od cijene električne energije tokom 24h, a ona je sama po sebi definisana konveksnom funkcijom cijene. U cilju detaljnih analiza, obje navedene pretpostavke su obuhvaćene jedinstvenim modelom naplate:

$$\sum_{m\in N} b_m = \sum_{m\in N} b_n \left(\frac{\sum_{h=1}^{H} l_m^h}{\sum_{h=1}^{H} l_n^h} \right) = b_n \frac{\sum_{m\in N}\sum_{h=1}^{H} l_m^h}{\sum_{h=1}^{H} l_n^h} . \tag{3.4}$$

Za svakog potrošača $n \in N$ slijedi:

$$b_n = \frac{\sum_{h=1}^{H} l_n^h}{\sum_{m\in N}\sum_{h=1}^{H} l_m^h} \left(\sum_{m\in N} b_m \right) = \frac{k\sum_{h=1}^{H} l_n^h}{\sum_{m\in N}\sum_{h=1}^{H} l_m^h} \left(\sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{m\in N} l_m^h \right) \right) = \Omega_n \sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{m\in N} \sum_{a\in A_m} x_{m,a}^h \right), \tag{3.5}$$

gdje je $\Omega_n \triangleq \frac{k\sum_{a\in A_n} E_{n,a}}{\sum_{m\in N}\sum_{a\in A_m} E_{m,a}}$.

Primjenom ovakvog sistema naplate, a uz pomoć tehnika teorije igara analizira se ponašanje potrošača, u cilju dobijanja optimalnog rješenja optimizacionog problema. Prvi korak ka tome je definisanje modela igre optimizacije, a koji proističe direktno iz dobijenog modela naplate i po kojem cijena koju svaki potrošač plaća zavisi, kako od rasporeda sopstvene, tako i od rasporeda potrošnje električne energije svih drugih potrošača tj. učesnika igre. Potrošači – učesnici igre, sa svojim strategijama – dnevnim rasporedom opterećenja, čine osnovu igre optimizacije rasporeda potrošnje električne energije, koja za cilj ima smanjenje cijene koju potrošači plaćaju. Vrijednost koju svaki potrošač $n \in N$ mora da isplati elektro-energetskoj kompaniji definiše se kao negativna vrijednost ukupne dnevne cijene koju potrošač n plaća za potrošnju svih svojih uređaja u okviru domaćinstva:

$$P_n\left(X_n, X_{-n}\right) = -b_n = -\Omega_n \times \left(\sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{m \in N} \sum_{a \in A_n} x_{m,a}^{h}\right)\right), \tag{3.6}$$

gdje je

$$X_{-n} \triangleq \left[X_1, \ldots, X_{n-1}, X_{n+1}, \ldots, X_N\right] \tag{3.7}$$

i označava vektor čiji su elementi rasporedi dnevne potrošnje električne energije svih domaćinstava izuzev n - tog.

Ovako definisana nekooperativna igra funkcioniše tako što svaki igrač tj. potrošač odabere sopstveni raspored potrošnje električne energije, tj. vektor X_n takav da optimizuje funkciju koristi P_n koja je ustvari funkcija C_h, tj. cost funkcije, u svakom času h.

3.3 Metod rješavanja nekooperativnih igara – Nash-ov ekvilibrijum

Kao što je već naglašeno, za analizu sistema za upravljanje potrošnjom električne energije od značaja su upravo nekooperativne igre. Kako bismo imali potpunu informaciju o tome na koji način teorija igara može biti primjenjena za razvoj DSM-a, analiziraćemo pristup primjene nekooperativnih igara za modelovanje interakcija među potrošačima, kao i između potrošača i izvora električne energije.

Tehnike za rješavanje nekooperativnih igara mogu se koristiti prilikom analize ponašanja potrošača. U nekooperativnim igrama svaki igrač se pridržava strategije koja mu donosi maksimalnu dobit, pri čemu nije neophodno da isti razmišlja o dobiti svih ostalih učesnika u igri. Izraz nekooperativne u ovom slučaju ne znači striktno odsustvo saradnje između igrača, već više ukazuje na odsustvo komunikacije među njima. U teoriji igara Nash-ov ekvilibrijum (Nash-ova ravnoteža) je koncept rješenja igre koja uključuje dva ili više igrača, kod kojeg se podrazumijeva da svaki učesnik igre bira najbolju strategiju, analizirajući sve moguće strategije svih ostalih učesnika igre. On predstavlja osnovni koncept teorije igara i najšire primjenljiv metod za predikciju ishoda strategijskih igara. Trenutni skup izabranih strategija i odgovarajućih dobitaka predstavlja Nash-ov ekvilibrijum ukoliko je svaki igrač izabrao strategiju, i nijedan igrač ne može da profitira promjenom svoje strategije, pod pretpostavkom da ostali igrači ne promjene svoje strategije. Prosto rečeno, dva igrača su u Nash-ovom ekvilibrijumu ako je svaki od njih donio najbolju moguću odluku, uzevši u obzir odluku protivnika. Slično, više igrača je u Nash-ovom ekvilibrijumu ako je svaki od njih donio najbolju moguću odluku uzevši u obzir odluke svih ostalih igrača. Svaka igra ima tri osnovne komponente: skup igrača, skup strategija koje su na raspolaganju svakom od igrača i skup funkcija koristi.

Definicija 1**:** Nash-ov ekvilibrijum je skup akcija (odluka) $a^* = \left(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*\right)$, u kojem svakom učesniku igre $i, i = 1, 2, \ldots, n$ odgovara konkretna akcija a_i^*, odnosno učesnik i birajući bilo koju akciju drugačiju od a_i^* pri čemu ostalih $n-1$ učesnika ne mijenjaju svoje akcije, ne može postići po sebe bolji rezultat od onog koji se ostvaruje upravo akcijom a_i^*.

Nash-ov ekvilibrijum ćemo najjednostavnije objasniti na primjeru dva učesnika igre. Nash-ov ekvilibrijum će biti postignut ukoliko prvi igrač donese najbolju moguću odluku, uzimajući u obzir odluku drugog igrača, dok drugi igrač postupa potpuno isto. U idealnim uslovima, kada se igrači nasumično biraju, Nash-ov ekvilibrijum predstavlja ravnotežno stanje jer pojedinačnim igračima nikako nije u interesu da odstupaju od skupa akcija a^*. Ukoliko sa $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ označimo skup akcija u kojem svakom igraču $i, i=1,2,\ldots,n$ odgovara konkretna akcija a_i, dok sa $a_i^{'}$ označimo bilo koju akciju igrača i različitu od akcije $\mathrm{a_i}$. Tada će ($a_i^{'}$, a_{-i}) označavati skup akcija u kojem se svi igrači osim igrača i priklanjaju svojim izborima definisanim skupom akcija a, tj. svaki igrač $j \neq i$ ostaje pri svojoj odluci a_j koja je dio skupa akcija a), dok je izbor i–tog igrača akcija $a_i^{'}$. Iz prethodnog slijedi da će skup akcija a^* predstavljati Nash-ov ekvilibrijum ukoliko ni za jednog igrača i ne postoji akcija a_i takva da on više preferira skup akcija $\left(a_i^{'},a_{-i}^*\right)$ nego skup akcija a^*.

Definicija 2**:** Skup akcija a^*je u Nash-ovom ekvilibrijumu ako je za svakog igrača i i za svaku njegovu akciju a_i, a^* barem jednako dobar koliko i skup akcija $\left(a_{i,}a_{-i}^*\right)$ u kome igrač i bira akciju a_i a svi drugi igrači biraju svoje akcije (strategije) definisane preko a^*. Za svakog igrača važi:

$$u_i\left(a^*\right) \geq u_i\left(a_{i,}a_{-i}^*\right), \tag{3.8}$$

za bilo koju njegovu akciju a_i gdje je u_i funkcija plaćanja.

Postoje igre kod kojih je dostizanje Nash-ovog ekvilibrijuma nemoguće, kao i one kod kojih se može dostići više Nash-ovih ekvilibrijuma. Bitno je istaći i da početne pretpostavke igre ne sadrže idealan opis realne situacije. Takođe se postavlja i pitanje nakon koliko ponavljanja će igra uopšte dostići Nash-ov ekvilibrijum, s obzirom da Nash-ova definicija daje isključivo informacije o ravnotežnoj tački, ali ne i o izboru putanja koje igrači prate dok se njihova očekivanja o međusobnoj igri na kraju ne konsoliduju i ne postanu u potpunosti koordinisana.

3.4 Dokaz Nash-ovog ekvilibrijuma

Za igru određivanja rasporeda potrošnje električne energije definisanu u poglavlju 3.2 važe sledeće tri teoreme:

Teorema 1: Pod pretpostavkom da (3.1) i (3.3) važe Nash-ov ekvilibrijum igre rasporeda potrošnje električne energije uvjek postoji i jedinstven je.

Dokaz: Uzimajući u obzir pretpostavku da je funkcija cijene električne energije uvjek striktno konveksna $\forall h \in H$. slijedi da je funkcija koristi $P_n\left(X_n;X_{-n}\right)$, uzimajući X_n u obzir, uvjek striktno konkavna. Stoga je i igra rasporeda potrošnje električne energije striktno konkavna igra u kojoj učestvuje N igrača. U ovom slučaju, postojanje Nash-ovog ekvilibrijuma direktno proizilazi iz Teoreme 2. Rasporedi potrošnje električne energije potrošača $\left(x_n^*, \forall n \in N\right)$ formiraju Nash-ov ekvilibrijum igre ako i samo ako važi:

$$P_n\left(x_n^*, x_{-n}^*\right) \geq P_n\left(x_n, x_{-n}^*\right), \qquad \forall\, \mathrm{n} \in \mathrm{N},\ \ x_n \geq 0\,. \tag{3.9}$$

Ukoliko se postigne Nash-ov ekvilibrijum igre rasporeda potrošnje električne energije nijedan igrač ne bi mogao da profitira odstupanjem od svoga rasporeda $\left(x_n^*, \forall n \in N\right)$.

Teorema 2: Tačka ekvilibrijuma postoji za bilo koju konkavnu igru u kojoj učestvuje N igrača [22].

Teorema 3: Jedinstveni Nash-ov ekvilibrijum igre rasporeda potrošnje električne energije predstavlja optimalno rješenje problema minimizacije cijene električne energije (2.12).

Dokaz: Za dokaz treće teoreme potrebno je pokazati da globalno optimalno rješenje problema minimizacije (2.12) zapravo predstavlja Nash-ov ekvilibrijum Igre rasporeda potrošnje električne energije. Sa $X_1^*, \ldots, X_N^*$ se označava optimalno rješenje problema (2.12). Osim toga definiše se

$$C^* \triangleq \sum_{h=1}^{H} C_h\left(\sum_{m \in N} \sum_{a \in A_m} x_{m,a}^h\right). \tag{3.10}$$

Iz definicije optimalnosti, za svakog potrošača i bilo koji proizvoljan vektor vrijednosti $X_n \geq 0$, važi

$$C^* \leq \sum_{h=1}^{H} C_h\left(\sum_{m \in N \setminus \{n\}} \sum_{a \in A_m} x_{m,a}^{h^*} + \sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h\right). \tag{3.11}$$

Ukoliko se i lijeva i desna strana nejednakosti pomnože sa $-\Omega_n$ dobija se sledeća nejednakost:

$$P_n\left(X_n^*; X_{-n}^*\right) \geq P_n\left(X_n; X_{-n}^*\right), \ \ \forall\ X_n \geq 0\,. \tag{3.12}$$

Kada uporedimo (3.9) i (3.11), možemo zaključiti da optimalno rješenje $X_1^*, \ldots, X_N^*$ zapravo predstavlja Nash-ov ekvilibrijum igre rasporeda potrošnje električne energije. Iz Teoreme 1 važi da je Nash-ov ekvilibrijum Igre jedinstven, stoga slijedi da je optimalno rješenje problema (2.12) ekvivalentno Nash-ovom ekvilibrijumu igre.

Iz navedene dvije teoreme može se zaključiti da ukoliko funkcije cijene $C_h\left(x\right)$ rastuće i striktno konveksne $\forall h \in H$ i ukoliko model naplate zadovoljava pretpostavke (3.9) i (3.11), potrošači tj. učesnici igre rasporeda potrošnje električne energije će i te kako biti podstaknuti da rješavanjem problema (2.12) sarađuju jedni sa drugima u cilju smanjenja cijene koju plaćaju za utrošenu električnu energiju.

4 Optimizacioni metodi

IPM optimizacioni metodi već više od trideset pet godina, od kada su razvijeni za rješavanje konveksnih problema optimizacije, imaju veliki uticaj na razvoj te matematičke oblasti. Sa svojim karakteristikama IPM metodi za linearno i kvadratno (konveksno) programiranje predstavljaju vrlo atraktivan metod rješavanja velikog broja optimizacionih problema [17],[18]. Jedna od tih karakteristika jeste mogućnost dobijanja optimalnog rješenja optimizacionog problema u konačnom broju iteracija. Termin programiranje se ovdje odnosi na proučavanje problema u kojima se traži maksimizovanje ili minimizovanje realne funkcije tj. određivanje vrijednosti promjenljivih takvih da daju optimalnu vrijednost realne funkcije ujedno zadovoljavajući postavljene uslove tj. ograničenja. Osnovna forma matematičkog problema optimizacije tj. optimizacionog problema je sledeća:

$$\begin{gathered} \min f_0(x) \\ \text{gdje je } f_i(x) \le b_i, \;\; i = 1,\ldots,m \end{gathered} \tag{4.1}$$

gdje vektor $x = (x_1,\ldots,x_n)$ predstavlja optimizacionu promjenljivu problema, funkcija $f_0 : R_n \to R$ predstavlja objektivnu funkciju koja se optimizuje, funkcije $f_i : R_n \to R \; i = 1,\ldots,m$ predstavljaju funkcije ograničenja (u vidu jednakosti ili nejednakosti), dok konstante $b_{1,\ldots,}b_m$ predstavljaju granice funkcija ograničenja. Vektor x^* nazivamo optimalnim rješenjem optimizacionog problema ukoliko u skupu svih vektora koji zadovoljavaju ograničenja on ima najmanju objektivnu vrijednost odnosno za ma koje z za koje je $f_1(z) \le b_1,\ldots, f_m(z) \le b_m$, slijedi da je $f_0(z) \ge f_0(x^*)$.

U odnosu na tip funkcije koja se optimizuje kao i na način definisanja ograničenja postoji više klasa optimizacije. Ukoliko su funkcija koja se optimizuje, kao i funkcije ograničenja linearne, što znači da $\forall x, y \in R_n$ svako $\alpha, \beta \in R$ zadovoljavaju sledeći uslov:

$$f_i(\alpha x + \beta y) = \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \tag{4.2}$$

riječ je o linearnom problemu optimizacije.

Ukoliko su funkcija koja se optimizuje, kao i funkcije ograničenja konveksne funkcije govorimo o klasi konveksnih problema optimizacije koji zadovoljavaju sledeći uslov nejednakosti:

$$f_i(\alpha x + \beta y) \le \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \tag{4.3}$$

za svako $x, y \in R_n$ i svako $\alpha, \beta \in R$ gdje je $\alpha + \beta = 1, \alpha \ge 0, \beta \ge 0$.

Ukoliko se uporede uslovi linearnosti (4.2) i konveksnosti (4.3) zaključuje se da je svaki linearni problem optimizacije ujedno i konveksan. Za rješenje konveksnih problema optimizacije razvijeni su vrlo pouzdani i efikasni algoritmi.

4.1 Klase optimizacionih problema (linearno i konveksno programiranje)

Linearno programiranje predstavlja važnu klasu optimizacionih problema koja je još od 1940. godine u centru pažnje oblasti optimizacije [16]. Za rješavanje ove grupe optimizacionih problema ne postoji jednostavna analitička formula, ali su razvijeni efikasni metodi kao što su *SIMPLEKS* metod i od skoro razvijeni IPM metod. Oba algoritma su se pokazala dosta pouzdanim. Dugo vremena je *SIMPLEKS* metod bio jedini način rješavanja optimizacionih problema koji pripadaju ovoj klasi, pa je samim tim i postao najpoznatiji metod za rješavanje linearnih problema optimizacije. Pored toga što se u praksi pokazao kao vrlo efikasan i pouzdan metod, njegov način traženja optimalnog rješenja dovodi do mogućnosti da se dragocjeno vrijeme uštedi na provjeru mnogih rješenja prije nego što se dođe optimalnog.

Uslovi koje funkcija optimizacije kao i funkcije ograničenja moraju zadovoljavati da bi pripadale ovom problemu optimizacije su:

$$\begin{gathered} \min c^T x \\ \text{gdje je } a_i^T x \le b_i,\ i = 1,...,m \end{gathered} \tag{4.4}$$

gdje vektori $c, a_1, \ldots, a_m \in R_n$ i skalari $b_1, \ldots, b_m \in R_n$ predstavljaju parametre problema optimizacije koji definišu objektivnu funkciju, kao i funkcije ograničenja. Postoji veliki broj slučajeva u kojima optimizacioni problem u svojoj originalnoj formi ne pripada klasi linearnih problema optimizacije ali se određenim tehnikama može transformisati do ekvivalentne linearne forme. Linearni problem optimizacije predstavlja specijalan slučaj konveksnog problema optimizacije.

Uslovi koje funkcija optimizacije kao i funkcije ograničenja moraju zadovoljavati da bi pripadale klasi konveksnih problema optimizacije su:

$$\begin{gathered} \min f_0(x) \\ \text{gdje je } f_i(x) \le b_i,\ i = 1, \ldots, m \end{gathered} \tag{4.5}$$

gdje su funkcije $f_0, \ldots, f_m : R_n \to R$ konveksne i zadovoljavaju već pomenuti uslov konveksnosti (4.5). IPM metodi konveksne probleme optimizacije mogu rješiti u konačnom broju iteracija koji se gotovo uvjek kreće između deset i stotinu. Nakon prethodno navedenih osnovnih pojmova konveksne optimizacije može se smatrati da samim prepoznavanjem problema kao konveksnog, ili transformacijom nekog problema do istog, gotovo da smo na pragu pronalaženja optimalnog rješenja. Međutim, prepoznavanje konveksnog problema optimizacije, tačnije predstavljanje objektivne funkcije kao konveksne ili kao funkcije koja se može transformisati u konveksnu može biti veoma teško i komplikovano. Stoga uspješnost korišćenja konveksne optimizacije leži upravo u sposobnosti prepoznavanja i formulacije problema.

Problem minimizacije cijene električne energije je, kao što smo već naglasili konveksan, jer je po pretpostavci funkcija cijene električne energije uvjek konveksna funkcija. Samim tim za dalju analizu u tezi od značaja je klasa konveksnih problema optimizacije.

4.2 Konveksne funkcije

Funkcija $f : R_n \to R$ je konveksna ako je $dom\, f$ konveksan skup i ako $\forall x, y \in dom\, f$, i $\forall \theta$ gdje je $0 \le \theta \le 1$ važi da je:

$$\left(\theta x + (1-\theta) y\right) \le \theta f(x) + (1-\theta) f(y) \tag{4.6}$$

gdje je $dom\, f$ domen funkcije f.

U geometrijskom smislu ova nejednakost znači da dio linije, između tačaka $\left(x, f(x)\right)$ *i* $\left(y, f(y)\right)$ koji predstavlja tetivu koja spaja tačke x i y, leži iznad grafika funkcije f.

Funkcija je striktno konveksna ukoliko je u (4.6) ispunjen uslov striktne nejednakosti. Funkcija f je konveksna ako i samo ako je $\forall x \in dom\, f$ i ako je $\forall v$ funkcija $g(t) = f(x+tv)$ konveksna na svom domenu, $\{t \,|\, x+tv \in dom\, f\}$. Ovo je veoma korisna osobina koja nam omogućava da ograničavanjem funkcije na liniju provjerimo njenu konveksnost.

Konveksnost funkcije možemo provjeriti i na osnovu uslova prvog tj. drugog reda [15], tačnije prvog i drugog izvoda funkcije. Ukoliko je funkcija f diferencijabilna (tj. gradijent funkcije f se može izračunati u svakoj tački $dom\, f$) slijedi da je funkcija f konveksna ako i samo ako je $dom\, f$ konveksan i ukoliko $\forall x, y \in dom\, f$ važi:

$$f(y) \ge f(x) + \nabla f(x)^T (y-x), \tag{4.7}$$

gdje je $\nabla f(x)^T$ gradijent funkcije f u tački x.

Striktna konveksnost funkcije formulisana preko *uslova prvog reda* bi podrazumijevala sledeće: funkcija f je striktno konveksna ako i samo ako je $dom\, f$ konveksan i ako $\forall x, y \in dom\, f$, $x \ne y$ slijedi da je:

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) \tag{4.8}$$

Uslov drugog reda kaže da ukoliko je funkcija f dvostruko diferencijabilna tj. Hesijan odnosno drugi izvod funkcije ∇^2 se može izračunati u svakoj tački $dom\, f$, slijedi da je funkcija f konveksna ako i samo ako je $dom\, f$ konveksan i ukoliko su vrijednosti Hesijana pozitivne i veće ili jednake od nule, $\nabla^2 \ge 0$. Za funkciju na skupu R ovaj uslov se svodi na $f''(x) \ge 0$ odnosno drugi izvod funkcije mora biti neopadajući.

4.3 Konveksni problemi optimizacije

Optimizacioni problem predstavljen sledećom notacijom:

$$\begin{aligned} &\max f_0(x) \\ &\text{gdje je } f_i(x) \le b_i, i = 1,...,m , \\ &h_i(x) = 0,\ i = 1,..., p \end{aligned} \tag{4.9}$$

za cilj ima da se među svim vrijednostima x koje zadovoljavaju uslove $f_i(x) \le b_i, i = 1,\ldots,m$ i $h_i(x) = 0, i = 1,\ldots, p$ pronađe ona vrijednost x koja minimizuje funkciju $f_0(x)$. x predstavlja optimizacionu promjenljivu, dok funkcija f_0 predstavlja objektivnu funkciju koja se minimizuje (u našem slučaju funkciju cijene električne energije). Nejednačine $f_i(x) \le b_i$ predstavljaju ograničenja u vidu nejednakosti, dok se odgovarajuće funkcije $f_i(x)$ nazivaju funkcijama ograničenja nejednakosti. Jednačine $h_i(x) = 0$ predstavljaju ograničenja u vidu jednakosti, dok odgovarajuće funkcije $h_i(x)$ nazivaju funkcijama ograničenja jednakosti. Ukoliko je $m = p = 0$ problem opisan jednačinom (4.9) se svodi na optimizacioni problem bez ograničenja. Domen optimizacionog problema je set tačaka za koje je definisana funkcija optimizacije i sve funkcije ograničenja:

$$\mathrm{D} = \bigcap_{i=0}^{m} dom\ f_i \cap \bigcap_{i=1}^{p} dom\, h_i \tag{4.10}$$

Tačka x koja pripada domenu je ostvarljiva ukoliko zadovoljava ograničenja $f_i(x) \le b_i$ i $h_i(x) = 0$. Ukoliko postoji barem jedna ostvarljiva tačka x, optimizacioni problem (4.9) je rješiv, u drugom slučaju je nerješiv. Skup svih ostvarljivih tačaka naziva se skupom rješenja optimizacionog problema.

Za formulisanje konveksnog problema optimizacije koristi se sledeća notacija:

$$\begin{aligned} &\max f_0(x) \\ &\text{gdje je } f_i(x) \le 0_i, i = 1,...,m \\ &a_i^T x = b_i, i = 1,..., p \end{aligned} \tag{4.11}$$

gdje su $f_i,\ldots, f_m$ konveksne funkcije. Upoređujući ovakvu formulaciju (4.11) sa formulacijom (4.9) vidjećemo da konveksne probleme optimizacije definišu dodatna tri uslova:

- Funkcija optimizacije mora biti konveksna
- funkcije ograničenja nejednakosti moraju biti konveksne
- funkcije ograničenja jednakosti moraju biti *affine* funkcije odnosno takve da se sastoje od zbira linearne funkcije + konstante i čiji je grafik prava linija $h_i(x) = a_i^T(x) - b_i$.

Iz navedenog slijedi da je skup svih ostvarljivih tačaka konveksnog optimizacionog problema konveksan, što samim tim znači da kod konveksnih optimizacionih problema minimizujemo konveksnu objektivnu funkciju nad konveksnim skupom tačaka.

Kada su i funkcija optimizacije i funkcije ograničenja takve da se sastoje od zbira linearne funkcije + konstante i čiji je grafik prava linija, radi se o linearnom problemu optimizacije (LP) koji, kao što smo već naglasili, predstavlja specijalan slučaj konveksnog problema optimizacije:

$$\begin{gathered} \min c^T(x)+d \\ \text{gdje je } Gx \le h \\ Ax = B \end{gathered} \tag{4.12}$$

za $G \in R^{m\times n}$ i $A \in R^{p\times n}$.

Kada je funkcija optimizacije (konveksna) kvadratna i funkcije ograničenja su takve da se sastoje od zbira linearne funkcije + konstante i čiji je grafik prava linija, konveksni problem optimizacije (4.12) se naziva kvadratnim programom (quadratic programming - QP) i može se predstaviti na sledeći način:

$$\begin{gathered} \min 1/2x^T Px + q^T x \\ \text{gdje je } Gx \le h \\ Ax = b \end{gathered} \tag{4.13}$$

za $P \in S_+^n, G \in R^{m\times n}$ i $A \in R^{p\times n}$.

4.4 Teorija dualnosti – osnovni pojmovi

Da bi se na pravi način objasnilo funkcionisanje različitih metoda za rješavanje problema optimizacije prije svega je potrebno naglasiti ulogu pojma dualnosti, kako praktičnu tako i teoretsku, ali i objasniti osnovne ideje teorije dualnosti. Raznim transformacijama objektivne funkcije i funkcija ograničenja optimizacioni problemi se mogu prevesti u ekvivalentne probleme, ali u drugačijoj formi [17],[18]. Svakom optimizacionom problemu se osim mnoštva drugih ekvivalentnih problema može pridružiti i takozvani dualni problem. U terminologiji teorije dualnosti početni problem se naziva primarnim problemom. Primarni i dualni problem nisu ekvivalentni problemi, ali su srodni i vezani. Praktična vrijednost teorije dualnosti jeste da se nekada transformacijom primarnog u dualni dobija problem koji je takav da ga algoritmi za rješavanje riješe u manjem broju koraka, nego što bi riješili primarni problem. Pri tome se algoritam kreće kroz rješenja koja su nedozvoljena za primarni, ali se završava rješenjem koje je dozvoljeno i za primarni i za dualni problem, što je optimalno rješenje oba problema.

U teoriji matematičke optimizacije dualnost podrazumijeva da se optimizacioni problem može posmatrati iz dvije perspektive, perspektive primarnog problema i perspektive dualnog problema (princip dualnosti). Teorija dualnosti izučava matematička svojstva odnosa primarnog i dualnog problema. Optimalna rješenja primarnog i dualnog problema ne moraju biti jednaka, njihova razlika se naziva *jazom dualnosti* i uvjek je veća ili jednaka nuli. Međutim, kada je optimizacioni problem konveksan, pomenuta razlika je jednaka nuli i rješenje primarnog problema je ustvari rješenje dualnog problema. Dakle dualni problem se u tome slučaju zasniva na teoriji dualiteta po kojem je maksimalna vrijednost objektivne funkcije primarnog problema jednaka minimalnoj vrijednosti objektivne funkcija dualnog problema i obratno [17].

Najčešće se problem dualnosti odnosi na Lagrange-ianov problem dualnosti, koji se dobija formiranjem Lagrange-iana. Dakle, za svaki primarni problem postoji, tj. može se formirati, sa njim usko vezan Lagrange-ianov dualni problem. Posmatra se standardna forma problema optimizacije (minimizacije) (4.9) gdje $x \in R^n$ predstavlja promjenljivu, dok funkcije $f_0, f_1, \dots, f_m$ i $h_0, h_1, \dots, h_m$ predstavljaju objektivnu funkciju i funkcije ograničenja nejednakosti i jednakosti respektivno.

Pretpostavićemo da domen optimizacionog problema nije prazan skup i sa p^* označiti optimalno rješenje ovako formulisanog problema optimizacije (4.9). Lagrange-ian $L: R^m \times R^n \times R^p \to R$ koji se odnosi na optimizacioni problem (4.9) definišemo na sledeći način:

$$L(x, \lambda, v) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} v_i h_i(x), \tag{4.14}$$

gdje je domen Lagrange-iana $\operatorname{dom} L = \mathrm{D} \times R^m \times R^p$, gdje D predstavlja domen optimizacionog problema (4.10). λ_i predstavlja Lagrange-ianov množilac koji se odnosi na i-to ograničenje nejednakosti $f_i(x) \le 0$, dok v_i predstavlja Lagrange-ianov množilac koji se odnosi na i-to ograničenje jednakosti $h_i(x) = 0$. Vektori λ i v se nazivaju dualnim promjenljivim ili Lagrange-ovim vektorima množenja, a koji se odnose na optimizacioni problem (4.9).

Lagrange-ovu dualnu funkciju $g: R^m \times R^p \to R$ definišemo kao minimalnu vrijednost Lagrange-iana za vrijednost promjenljive x gdje za $\lambda \in R^m$, $v \in R^p$ slijedi:

$$g(\lambda, v) = \inf_{x \in \mathrm{D}} f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} v_i h_i(x) \tag{4.15}$$

Najvažnija osobina Lagrange-ove funkcije je sledeća:

$$\mathrm{g}(\lambda, \mathrm{v}) \le \mathrm{p}^*, \tag{4.16}$$

za bilo koje $\lambda \ge 0$ *i* bilo koje v.

Za svaku vrijednost para (λ, v), gdje je $\lambda \ge 0$, rješenje Lagrange-ove dualne funkcije daje nižu vrijednost od optimalnog rješenja p^* optimizacionog problema minimizacije. Ta niža vrijednost zavisi od parametara λ i v. Zadatak je pronaći najbolju (najveću) nižu vrijednost koju je moguće dobiti koristeći Lagrange-ovu dualnu funkciju. Uzevši to u obzir definišemo sledeći optimizacioni problem:

$$\begin{gathered} \max g(\lambda, v) \\ \text{gdje je } \lambda \ge 0 \end{gathered} \tag{4.17}$$

Ovako definisan problem se naziva Lagrange-ovim dualnim problemom optimizacionog problema (4.9). U ovom kontekstu se inicijalni problem naziva i primarnim problemom. Skup (λ, v) se naziva dvostruko ostvarljivim skupom vrijednosti dualnog problema, dok će se sa (λ^*, v^*) označavati dvostruko optimalni skup vrijednosti dualnog problema. Vrijednosti λ^* i v^* se drugačije nazivaju i optimalnim Lagrange-ovim množiocima, ukoliko je njihova vrijednost optimalna vrijednost dualnog problema (4.9).

Bez obzira na to da li je primarni problem (4.9) konveksan, Lagrange-ov dualni problem (4.17) predstavlja konveksan problem optimizacije, jer je funkcija optimizacije koja se maksimizuje konkavna, dok je funkcija ograničenja konveksna.

Optimalna vrijednost Lagrange-ovog dualnog problema, koja se obilježava sa d^* je po definiciji najbolja donja vrijednost optimalnog rješenja p^* koja se može ostvariti definisanjem Lagranžove dualne funkcije. Iz ovoga slijedi veoma jednostavna i jednako važna nejednakost: $d^* \le p^*$, koja važi i u slučajevima kada originalni problem nije konveksan. Ova osobina se naziva 'slabom dualnošću'. Razliku $d^* - p^*$ nazivamo optimalnim jazom dualnosti (optimal duality gap) originalnog problema, jer predstavlja razliku optimalne vrijednosti primarnog problema i najbolje (najveće) donje vrijednosti koja može biti ostvarena korišćenjem Lagranžove dualne funkcije. Optimalni jaz dualnosti je uvjek nenegativna vrijednost. Ukoliko važi jednakost $d^* = p^*$, slijedi da je vrijednost optimalnog jaza dualnosti jednaka nuli, što se naziva osobinom 'jake dualnosti'. U većini slučajeva ukoliko je primarni problem konveksan važi jaka dualnost. Jedan od uslova pod kojim važi jaka dualnost jeste Slater-ov uslov koji podrazumijeva da postoji x takvo da je:

$$f_i\left(x\right) < 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad Ax = b \tag{4.18}$$

Ovakva tačka se ponekad naziva striktno ostvarljivom tačkom (*strictly feasible point*). Po Slater-ovoj teoremi jaka dualnost postoji ukoliko su ispunjeni Slater-ovi uslovi i ukoliko je funkcija optimizacije konveksna.

Ukoliko je optimalna vrijednost dualnog problema $\left(\lambda, v\right)$ ostvarljiva to znači da granica optimalne vrijednosti primarnog problema može biti izračunata: $p^* \ge g\left(\lambda, v\right)$. Stoga ostvarljiva tačka dualnog problema $\left(\lambda, v\right)$ predstavlja potvrdu postojanja optimalne vrijednosti primarnog problema takve da je $p^* \ge g\left(\lambda, v\right)$. Ostvarljiva tačka dualnog problema omogućava da odredimo koliko je neka ostvarljiva tačka suboptimalna, pri čemu ne moramo znati tačnu vrijednost p^*. Ukoliko je x ostvarljiva tačka primarnog problema, a $\left(\lambda, v\right)$ ostvarljiva tačka dualnog problema slijedi:

$$f_0\left(x\right) - p^* \le f_0\left(x\right) - g\left(\lambda, v\right) \tag{4.19}$$

Iz gore navedene nejednakosti slijedi da je $x\epsilon$-suboptimalna tačka gdje je $\epsilon = f_0\left(x\right) - g\left(\lambda, v\right)$ i ujedno predstavlja jaz dualnosti (toleranciju). Ukoliko je jaz dualnosti primarnog-dualnog para $\left(x, \left(\lambda, v\right)\right)$ jednak nuli, tj. $f_0\left(x\right) = g\left(\lambda, v\right)$ slijedi da je x optimalno rješenje primarnog problema, dok je $\left(\lambda, v\right)$ optimalno rješenje dualnog problema. Pomenute tvrdnje se koriste za definisanje *kriterijuma zaustavljanja* u optimizacionim algoritmima. Ukoliko se pretpostavi da rješenje algoritma daje niz ostvarljivih tačaka primarnog problema $x^{(k)}$ kao i niz ostvarljivih tačaka dualnog problema ($\lambda^{(k)}$, $v^{(k)}$) za $k = 1, 2, \ldots, i$ gdje je $\epsilon > 0$ vrijednost zahtijevane apsolutne tačnosti, onda je uslov terminacije algoritma tj. *kriterijuma zaustavljanja* definisan na sledeći način:

$$f_0\left(x^{(k)}\right) - g\left(\lambda^{(k)}, v^{(k)}\right) \le \epsilon \tag{4.20}$$

Gore navedeni uslov garantuje da je po završetku algoritma tačka $x\epsilon$-suboptimalna.

Ukoliko pretpostavimo da su funkcije $f_0, f_1, \ldots, f_m$ i $h_1, \ldots, h_p$ diferencijabilne, kao i da su x^* i (λ^*, v^*) bilo koje tačke primarnog, tj. dualnog problema takvih vrijednosti da je jaz dualnosti jednak nuli, uzevši u obzir da tačka x^* minimizuje $L\left(x, \lambda^* v^*\right)$, slijedi da je vrijednost njegovog gradijenta u njoj jednak nuli:

$$\nabla f_0\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla f_i\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{p} v_i^* \nabla h_i\left(x^*\right) = 0$$

Iz ove jednakosti važe sledeći uslovi:

$$\begin{gathered} f_i\left(x^*\right) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m \\ h_i\left(x^*\right) = 0,\ i = 1, \ldots, p \\ \lambda_i^* \geq 0\ \ i = 1, \ldots, m \\ \lambda_i^* f_i\left(x^*\right) = 0\ \ i = 1, \ldots, m \\ \nabla f_0\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla f_i\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{p} v_i^* \nabla h_i\left(x^*\right) = 0\ , \end{gathered} \tag{4.21}$$

koji se nazivaju Karush-Kuhn-Tucker-ovim (KKT) uslovima.

Za bilo koji optimizacioni problem kod kojeg je funkcija optimizacije diferencijabilna i za čije funkcije ograničenja važi uslov jake dualnosti, bilo koji par optimalnih tačaka primarnog i dualnog problema mora zadovoljavati KKT uslove. Ukoliko je primarni problem konveksan dovoljno je da budu zadovoljeni KKT uslovi (4.21) da bi postojale optimalne tačke primarnog i dualnog problema. Ukoliko je funkcija optimizacije konveksnog optimizacionog problema diferencijabilna i funkcije ograničenja zadovoljavaju Slaterov uslov, onda KKT uslovi obezbjeđuju neophodan i dovoljan uslov za pronalaženje optimalnog rješenja problema.

KKT uslovi imaju veoma bitnu ulogu u rješavanju problema optimizacije. Tačnije, mnogi algoritmi za rješavanje konveksnih optimizacionih problema, kao što je Barrier-ov metod, ustvari predstavljaju metode za rješavanje KKT uslova

4.5 Algoritmi za rješavanje optimizacionih problema

Da bismo riješili problem minimizacije cijene električne energije kojim se bavimo u tezi, bilo je potrebno krenuti od jednostavnih primjera, u pogledu definisanja funkcije cijene, njenih ograničenje, broja potrošača, broja uređaja po svakom potrošaču i td. Kombinacijom svih pomenutih uslova postepeno smo došli do formulisanja glavnog, i najsloženijeg problema, za čiju realizaciju i rješenje koristimo IPM metod. Međutim, kako bismo u potpunosti shvatili njegovo funkcionisanje bilo je potrebno savladati metode za rješavanje osnovnih problema optimizacije kao što su descent method, linesearch, kao i Newton-ov metod [18],[19],[20]. Primjena metode i njena složenost prevashodno zavise od definicije funkcija ograničenja objektivne funkcije koja se optimizuje. Redosledom kojim će biti objašnjeni metodi rješavanja optimizacionih problema u ovom poglavlju, u narednom poglavlju će biti prikazani i rezultati simulacija dobijeni primjenom različitih algoritama, a zavisno od načina definisanja problema optimizacije.

Barrier-ov metod predstavlja reprezentativnu tehniku koja pripada klasi IPM-a. Razlog tome su jako dobre performanse koje posjeduje, ali prije svega jednostavnost njegove implementacije.

Kako smo već naglasili, realizacijom niza jednostavnijih metoda u tezi, dolazimo do načina implementacije i realizacije IPM-a tj. Barrier-ovog metoda. Pomenuti jednostavniji metodi ustvari predstavljaju ključne komponente IPM metoda.

Kroz realizaciju pomenutih algoritama vidjece se kakva i kolika je uloga teorije dualnosti, odnosno da primjena teorije dualnosti omogućava definiciju uslova terminacije IPM algoritma.

4.6 Backtracking algoritam (descent method) i linesearch algoritam

Ukoliko je optimizacioni problem bez ograničenja i definisan na sledeći način:

$$\min f(x) \tag{4.22}$$

gdje je $f : R^n \to R$ konveksna i dvostruko neprekidno diferencijabilna (domen funkcija je otvoren skup).

Pretpostavimo da postoji optimalno rješenje ovakvog problema x^* i da je ono jedinstveno i označimo ga sa $\inf_x f(x) = f(x^*) = p^*$. Uzimajući u obzir diferencijabilnost i konveksnost objektivne funkcije f , neophodan ali i dovoljan uslov da tačka x^* bude optimalno rješenje ovako definisanog optimizacionog problema je:

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{4.23}$$

Rješavanje optimizacionog problema svodi na rješavanje uslova (4.23), a koji podrazumijeva set od n jednačina za n promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$ i u većini slučajeva se rješava pomoću iterativnog algoritma koji računa sekvencu tačaka $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots \in dom\, f$ koje pripadaju domenu objektivne funkcije gdje $f(x^{(k)}) \to p^*$ za $k \to \infty$. Ovako izračunata sekvenca se naziva minimizacionom sekvencom optimizacionog problema (4.22). Terminacija algoritma je definisana uslovom $f(x^{(k)}) \to p^* \leq \grave{o}$, gdje je $\grave{o} > 0$ i predstavlja unaprijed definisanu toleranciju.

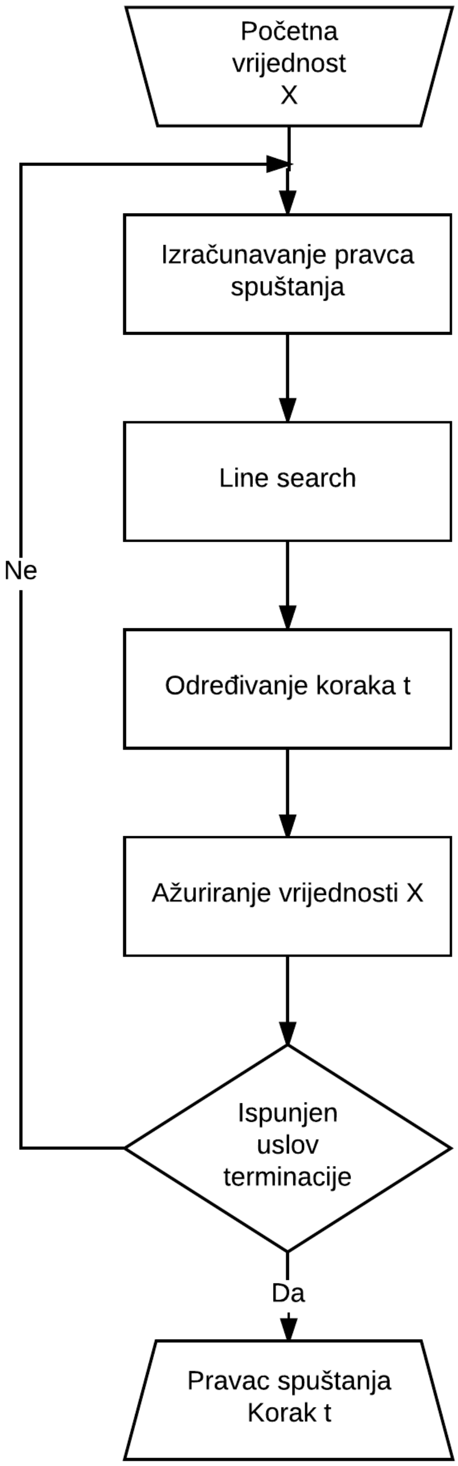
Descent metodi, tj. metodi spuštanja, predstavljaju iterativne algoritme za računanje minimizacione sekvence $x^{(k)}, k = 1, \ldots,$ gdje je $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t^{(k)} \Delta x^{(k)}$ i $t^{(k)} > 0$ (osim u slučaju kada je $x^{(k)}$ optimalno rješenje). Oznaka Δx predstavlja korak ili pravac računanja optimalnog rješenja, dok $k = 0, 1, \ldots,$ predstavlja broj iteracija algoritma. Skalar $t^{(k)} \geq 0$,koji se naziva *korak*, predstavlja veličinu ili dužinu pravca računanja u k-toj iteraciji. Naziv ovih metoda je opravdan sledećim uslovom:

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$$

Iz uslova konveksnosti znamo da iz nejednakosti $\nabla f(x^{(k)})^T (y - x^{(k)}) \geq 0$ slijedi da je $f(y) \geq f(x^{(k)})$, samim tim pravac računanja u descent method-u mora zadovoljavati sledeći uslov:

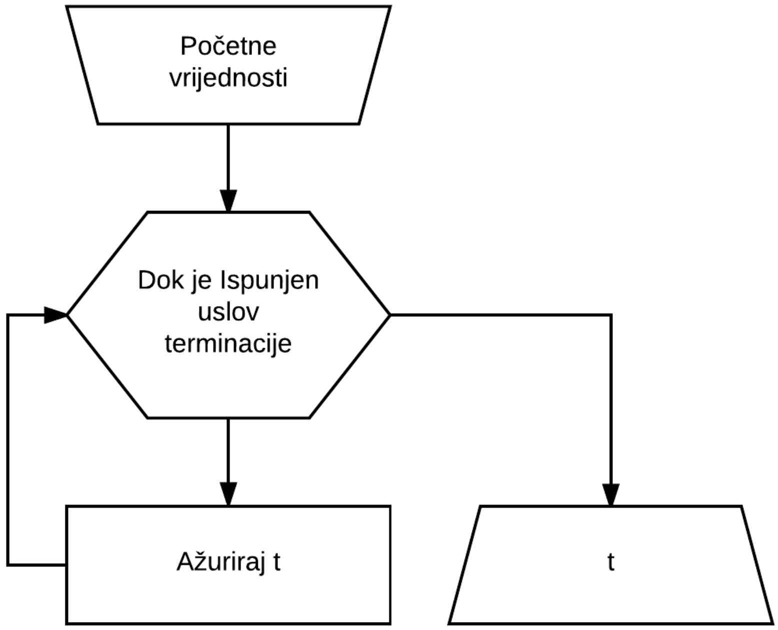
$$\nabla f(x^{(k)})^T \Delta x^{(k)} < 0$$

i naziva se *descent* pravcem, tj. pravcem spuštanja. Uzevši sve navedeno u obzir descent method se sastoji od dva ključna koraka i to određivanja pravca spuštanja Δx *k*ao i računanja dužine koraka t :



Slika 4.1 Grafički prikaz Backtracking algoritma

Drugi korak se naziva *line search* jer veličina koraka t određuje na kom dijelu linije $\{x + t\Delta x \mid t \in R_+\}$ će algoritam izvršiti sledeću iteraciju. Postoji više vrsta *line search* algoritama. Jedan od njih, jednostavan i vrlo efikasan, je *backtracking line search* algoritam koji zavisi od dvije konstante α,β za koje važi da je $0<\alpha<0.5, 0<\beta<1$:



Slika 4.2 Grafički prikaz Linesearch algoritma

Backtracking line search počinje sa veličinom koraka $t=1$ i redukuje ga faktorom β sve dok je ispunjen uslov $f(x+t\Delta x) > f(x)+\alpha t\nabla f(x)^T \Delta x.$ S obzirom da je Δx . *descent direction* tj. pravac spuštanja, $\nabla f(x)^T \Delta x < 0,$. za dovoljno male vrijednosti t slijedi da je:

$$f(x+t\Delta x) \approx f(x)+t\nabla f(x)^T \Delta x < f(x)+\alpha t\nabla f(x)^T \Delta x \text{ ,}$$

što ukazuje da će se backtracking algoritam eventualno završiti nakon konačnog broja iteracija, tj. uslov terminacije algoritma će biti ispunjen.

4.7 Newton-ov metod (rješavanje optimizacionih problema sa ograničenjima u vidu jednakosti)

Neka je konveksni optimizacioni problem definisan na sledeći način:

$$\begin{gathered} \max f(x) \\ \text{gdje je } Ax=b \end{gathered} \tag{4.24}$$

gdje je $f: R^n \to R$ konveksna i dvostruko neprekidno diferencijabilna funkcija u tački x, i $A \in R^{p\times n}$, i gdje je $\operatorname{rank} A = p < n.$

Poslednja pretpostavka znači da je broj ograničenja jednakosti manji od broja promjenljivih, pa se stoga ove jednačine mogu smatrati nezavisnim. Pretpostavka je da je x^* optimalno rješenje optimizacionog problema, a optimalna vrijednost označena kao $p^* = \inf\{f(x) \mid Ax = b\} = f(x^*)$.

Iz poglavlja 4.4, tačka x^* predstavlja optimalno rješenje konveksnog optimizacionog problema (4.24) ako i samo ako postoji $v^* \in R^P$ takvo da je

$$Ax^* = b,\ \nabla f(x^*) + A^T v^* = 0. \tag{4.25}$$

Rješavanje optimizacionog problema (4.24) se svodi na rješenje KKT jednačina (4.25).

Najvažniji specijalan slučaj optimizacionog problema (4.24) je kada je funkcija optimizacije f kvadratna.

Kao i većina IPM–a, i Barrier-ov metod za izračunavanje pravca spuštanja koristi Newton-ov metod [17]. Newton-ov metod za računanje pravca spuštanja koristi informaciju o drugom izvodu dobijenu iz Hesijana objektivne funkcije. Tačnije, u skupu definisanom ograničenjima u obliku jednakosti, on traži takav pravac u kojem se u poslednjoj iteraciji minimizuje lokalna kvadratna aproksimacija objektivne funkcije. Kako bi se riješio optimizacioni problem (4.24) u slučaju kada je funkcija optimizacije kvadratna nephodno je definisati i izračunati vrijednost Newton-ovog koraka $\Delta x_{nt.}$ U slučaju (4.24) Newton-ov korak Δx_{nt} je definisan jednakošču:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_{nt} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

gdje *w* predstavlja vrijednost optimalne dualne promjenljive kvadratnog optimizacionog problema. Newton-ov korak je definisan samo u tačkama gdje je KKT matrica nesingularna. U specijalnom slučaju, kod optimizacionih problema bez ograničenja, Newton-ov metod se svodi na rješavanje: $\Delta x_{nt} = -\left(\nabla^2 f(x)\right)^{-1} \nabla f(x)$.

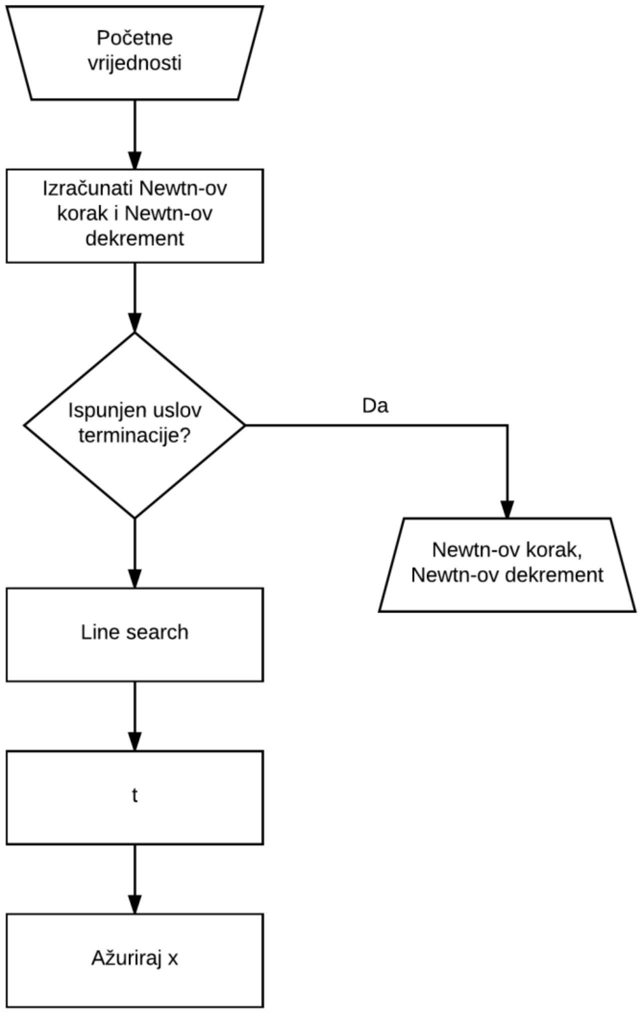
Kod rješavanja optimizacionih problema sa ograničenjima u vidu jednakosti definišemo Newton-ov dekrement:

$$\lambda(x) = \left(\Delta x_{nt}{}^T \nabla^2 f(x) \Delta x_{nt}\right)^{1/2}. \tag{4.27}$$

Na osnovu definicije kvadratnog modela funkcije u tački x, može se pokazati [21] da vrijednost $\lambda(x)^2/2$ zapravo predstavlja procjenu vrijednosti $f(x) - p^*$, kao i da vrijednost $\lambda(x)$ (ili $\lambda(x)^2$) predstavlja dobar *kriterijum zaustavljanja* Newton-ovog metoda [15].

Vrijednost $v \in R^n$ je vrijednost *ostvarljivog pravca* ukoliko je $Av = 0$. Uz predpostavku da je $Ax = bAx = b$ slijedi da je svaka tačka pravca $x + tv$ takođe ostvarljiva, odnosno $A(x + tv) = b.$ Ukoliko je za malu vrijednost $> 0,\ f(x + tv) < f(x)$, v predstavlja pravac spuštanja (*descent direction*). Newton-ov korak Δx_{nt} je uvjek ostvarljiv pravac spuštanja osim u slučajevima kada je x optimalno rješenje (tada je $\Delta x_{nt} = 0$). Drugi set jednačina koji definiše vrijednost Newton-ov og koraka Δx_{nt}, $A\Delta x_{nt} = 0$. Ovaj set jednačina je potvrda da Δx_{nt} predstavlja ostvarljivi pravac, a da je taj pravac *pravac spuštanja* proizilazi iz činjenice da je izvod pravca funkcije f duž Δx_{nt} negativan, tj. da je njegova vrijednost zapravo jednaka $-\lambda(x)^2$.

Na osnovu svega navedenog Newton-ov algoritam za rješavanje problema minimizacije sa ograničenjima u vidu jednakosti, za datu vrijednost promjenljive x gdje $x \in dom\, f$ i $Ax = b$ i gdje je vrijednost tolerancije $\partial > 0$, odvija se po algoritmu prikazanom na slici 4.3.



Slika 4.3 Grafički prikaz Newton-ov og algoritma

Metod se drugačije naziva i ostvarljiv metod spuštanja (*feasible descent method*), jer su, uz $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right)$, sve iteracije algoritma ostvarljive, osim u slučaju kada je x^k optimalno rješenje. KKT matrice moraju biti invertibilne za svako x.

4.8 Barrier metod za rješavanje optimizacionih problema sa ograničenjima u vidu nejednakosti

Barrier metod, kao jedan od IPM algoritama, služi za rješavanje konveksnih optimizacionih problema, koji pored već pomenutih ograničenja u vidu jednakosti imaju i ograničenja u vidu nejednakosti [21]. Pomenuti konveksni optimizacioni problem su definisani na sledeći način:

$$\begin{gathered}\min \mathrm{f}_0(x)\\ \text{gdje je } f_i\left(x^*\right)\le 0,\ i=1,\ldots,m\\ Ax=b\end{gathered} \tag{4.28}$$

Funkcije $f_0,\ldots,f_n:R^n\to R$ su konveksne i dvostruko neprekidno diferencijabilne, $A\in R^{P\times N}$ i rang matrice $A=p<n$. Prpostavka je da postoji x^*, tj. optimalno rješenje ovako definisanog optimizacionog problema i da je optimalna vrijednost objektivne funkcije u x^* $f_0(x^*)=p^*$. Druga pretpostavka je da je optimizacioni problem striktno ostvarljiv, tačnije da $\exists x\in D$ koje zadovoljava uslov $Ax=b$ kao i da je $f_i\left(x\right)<0$ za $i=1,\ldots,m$. Iz navedenog slijedi da je ispunjen Slaterov uslov postojanja optimalnog rješenja dualnog problema $\lambda^*\in R^m$, $v^*\in R^p$ koji zajedno sa optimalnim rješenjem x^* zadovoljava KKT uslove:

$$\begin{gathered}Ax^*=b,\ f_i\left(x^*\right)\le 0,\ i=1,\ldots,m\\ \lambda_i^* f_i\left(x^*\right)=0,\ i=1,\ldots,m\\ \lambda^*\ge 0\\ \nabla f_0\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla f_i\left(x^*\right)+A^T v^*=0\end{gathered} \tag{4.29}$$

Većina optimizacionih problema je već definisana na način (4.28) ili (4.29), i tako da funkcija optimizacije i funkcije ograničenja zadovoljavaju uslov dvostruke diferencijabilnosti. Međutim, oni optimizacioni problemi koji ne zadovoljavaju formu (4.28), kao ni pomenute pretpostavke o diferencijabilnosti, određenim postupcima se mogu transformisati do željene forme.

Ideja rješavanja optimizacionog problema (4.28) na kojoj se zasniva Barrier metod jeste da se optimizacioni problem sa ograničenjima u vidu nejednakosti (4.28) redukuje do optimizacionog problema sa ograničenjima u vidu jednakosti za čije rješavanje će se koristiti Newton-ov metod. Kako bi to bilo moguće iz formulacije (4.28) je neophodno eliminisati ograničenja u vidu nejednakosti, a to se postiže sledećom aproksimacijom:

$$\begin{gathered}\min f_0\left(x\right)+\sum_{i=1}^{m}-\left(1/t\right)\log\left(-f_i\left(x\right)\right)\\ \text{gdje je } Ax=b\end{gathered} \tag{4.30}$$

Funkcija optimizacije minimizacionog problema (4.30) je konveksna, jer je funkcija $-\left(1/t\right)\log\left(-u\right)$ diferencijabilna, ali i konveksna i rastuća u tački u. Ovako definisan optimizacioni problem se može rješiti Newton-ovim metodom.

Funkcija $$\phi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(-f_i(x)) \tag{4.31}$$

gdje je $\operatorname{dom}\phi = \{x \in R^n \mid f_i(x) < 0, i = 1, \ldots, m\}$, se naziva logaritamska funkcija Barrier-a. Domen funkcije $\phi(x)$. je skup tačaka koje zadovoljavaju ograničenja u vidu nejednakosti. Ako za bilo koje i, važi da $f_i(x) \to 0$, logaritmička funkcija Barrier-a raste za ma koju vrijednost t.

Optimizacioni problem (4.30) predstavlja samo aproksimaciju originalnog problema (4.28). Potrebno je pronaći rješenje aproksimativnog problema (4.30) takvo da ono predstavlja najbolje moguće rješenje originalnog problema (4.28), ali i utvrditi koji su to faktori koji utiču na takav ishod.

Uzevši u obzir da primjena Newton-ovog metoda zahtijeva izračunavanje Hesijana i gradijenta objektivne funkcije, može se zaključiti da bi prevelika vrijednost parametra *t* znatno otežala primjenu Newton-ovog metoda prilikom rješavanja problema (4.28), jer bi vrijednost Hesijana funkcije $f_0 + (1/t)\phi$ jako brzo varirala u vrijednostima granica ostvarljivog skupa. Međutim, ovaj problem se može zaobići rješavanjem niza problema dobijenih na osnovu definicije optimizacionog problema (4.28), povećanjem vrijednosti parametra *t* u svakoj iteraciji optimizacionog metoda (čime se povećava i tačnost aproksimacije), kao i time što će Newton-ov optimizacioni metod svaku iteraciju započeti u tački koja predstavlja rješenje optimizacionog problema za prethodnu vrijednost parametra *t*. Optimizacioni problem (4.28) možemo zapisati u sledećem obliku:

$$\begin{gathered} \min t f_0(x) + \phi(x) \\ \text{gdje je } Ax = b \end{gathered} \tag{4.32}$$

Pretpostavka je da za optimizacioni problem (4.33) postoji rješenje $\mathrm{x}^*(\mathrm{t})$ gdje je $t > 0$, kao i da se (4.34) može riješiti primjenom Newton-ovog metoda. *Centralna putanja* ovako definisanog optimizacionog problema se definiše kao skup tačaka $\mathrm{x}^*(\mathrm{t}), t > 0$ koje nazivamo *centralnim tačkama*. One moraju zadovoljavati sledeće uslove:

$$Ax^*(t) = b,\ f_i(x^*(t)) < 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

i $\exists \hat{v} \in R^p$ za koje je

$$\begin{gathered} 0 = t\nabla f_0(x^*(t)) + \nabla\phi(x^*(t)) + A^T\hat{v} = \\ t\nabla f_0(x^*(t)) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{-f_i(x^*(t))} \nabla f_i(x^*(t)) + A^T\hat{v} \end{gathered} \tag{4.35}$$

Iz (4.33) proizilazi važna osobina *centralne putanje*, a to je da za svaku centralnu tačku postoji dualna ostvarljiva tačka, što znači da su i niže vrijednost od optimalne vrijednosti p^* ostvarljive. Ukoliko dualni ostvarljivi par $\lambda_i^*(t), v^*(t)$ definišemo na sledeći način

$$\lambda_i^*(t) = -\frac{1}{t f_i(x^*(t))},\ i = 1, \ldots, m, \quad v^*(t) = \hat{v}/t, \tag{4.36}$$

a zatim uslove (4.33) zapišemo u obliku

$$\nabla f_0\left(x^*(t)\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(t)\nabla f_i\left(x^*(t)\right)+A^T v^*(t)=0,$$

uočava se da vrijednost $x^*(t)$ za vrijednosti $\lambda=\lambda^*(t)\, i\, v=v^*(t)$ minimizuje Lagranžijan

$$L(x,\lambda,v)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)+v^T(Ax-b).$$

Iz prethodnog slijedi da par $\lambda^*(t)$i $v^*(t)$ predstavlja dualni ostvarljivi par, pa je samim tim dualna funkcija $g(\lambda^*(t),v^*(t))$ definisana na sledeći način:

$$g(\lambda^*(t),v^*(t))=f_0\left(x^*(t)\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(t)f_i\left(x^*(t)\right)+v^*(t)^T\left(Ax^*(t)-b\right)=f_0\left(x^*(t)\right)-m/t,$$

što dalje potvrđuje činjenicu da se tačnost aproksimacije (4.37) povećava povećanjem vrijednosti parametra t, tj. da vrijednost $x^*(t)$ za $t\to\infty$ konvergira ka optimalnom rješenju:

$$f_0\left(x^*(t)\right)-p^*\le m/t$$

Iz navedenog slijedi da je tačka $x^*(t)m/t-\mathrm{suboptimalna}$, što omogućava da se za rješenje originalnog optimizacionog problema (4.28) primjeni Newton-ov metod sa garantovanom tačnošću $\grave{o}$. Ukoliko se parameter t definiše kao $t=m/\grave{o}$, optimizacioni problem sa ograničenjima u vidu jednakosti:

$$\begin{gathered}\min\ (m/\grave{o})\,f_0(x)+\phi(x)\\ \text{gdje je}\,Ax=b\end{gathered}$$

se rješava primjenom Newton-ovog optimizacionog metoda, koji se može nazvati i optimizacioni metod bez ograničenja. Newton-ov optimizacioni metod je dobar za rješavanje manjih optimizacionih problema, sa dobro odabranom vrijednošću početne tačke i dobro odabranom tolerancijom $\grave{o}$. Međutim, u ostalim slučajevima Newton-ov metod i nije tako dobar za primjenu, a razlog tome su brze varijacije vrijednosti Hesijana u vrijednostima granica barrier funkcije, gdje se u većini slučajeva i nalazi optimalno rješenje.

Barrier method ili kako se još naziva *path-following method* predstavlja nastavak, tj. produženi oblik Newton-ovog metoda koji se može primjeniti na veliki broj konveksnih optimizacionih problema. On se zasniva na rješavanju niza problema minimizacije, kako onih bez ograničenja, tako i onih sa linearnim ograničenjima (u vidu jednakosti ili nejednakosti). Barrier method koristi zadnju dobijenu tačku kao startnu tačku rješavanja narednog unconstrained minimization problema. Funkcioniše tako što za niz rastućih vrijednosti parametra t računa vrijednost $x^*(t)$ i to sve dok je vrijednost parametra $t\ge m/\grave{o}$, što nam garantuje da će dobijeno rješenje biti $\grave{o}-\mathit{suboptimalno}$ rješenje originalnog problema, Slika 4.4.

Početna tačka svake iteracije (osim prve) je prethodno izračunata *centralna tačka*. Svako izvršavanje prvog koraka algoritma se naziva *centralnim korakom* jer se u svakom izračunava vrijednost *centralne tačke* i to uz primjenu Newton-ovog metoda za *problem optimizacije (minimizacije) sa linernim ograničenjima*. Newton-ove iteracije koje se izvršavaju u *centralnom koraku* se nazivaju *unutrašnjim iteracijama*. Vrijednost Newton-ovog koraka Δx_{nt}, kao i vrijednost dual variables se dobijaju rješavanjem linearnih jednačina:

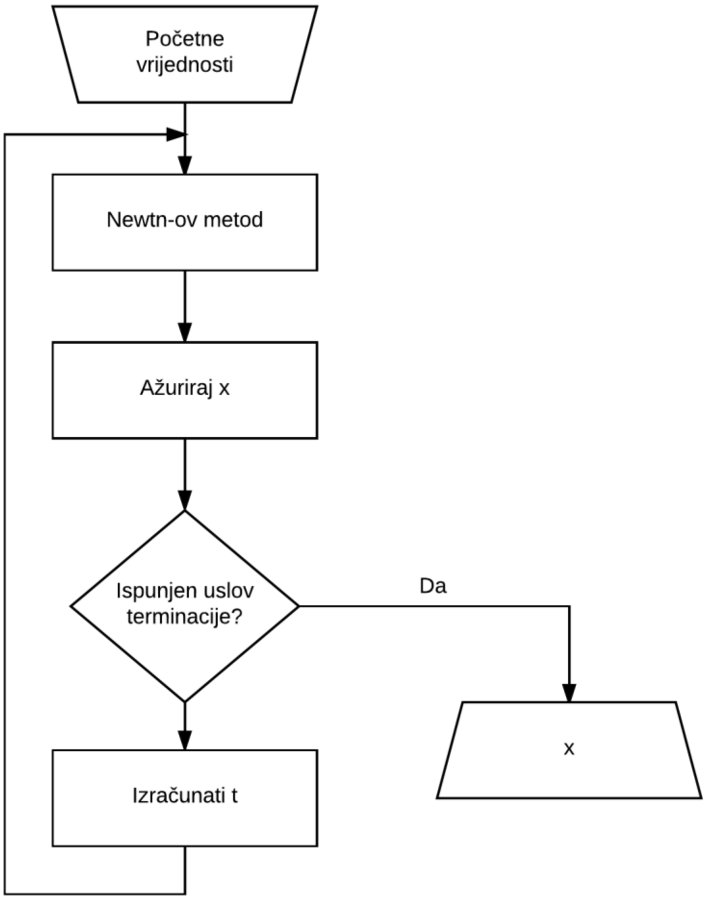
$$\begin{bmatrix} H & A^T \\ A & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ v_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

gdje je $H = t\nabla^2 f_0(x) + \nabla^2\phi(x)\ i\ g = t\nabla f_0(x) + \nabla\phi(x)$.

U svakoj iteraciji Barrier metoda se izračunava vrijednost striktno ostvarljive tačke, ali Barrier metod za svoju prvu iteraciju zahtijeva da startna tačka $x^{(0)}$ bude takođe striktno ostvarljiva. U cilju njenog pronalaženja izvršava se *faza 1* Barrier metoda, čiji je ishod pronalaženje striktno ostvarljive tačke koja će služiti kao početna tačka Barrier metoda ili se može desiti da takva tačka, koja zadovoljava jednakosti i nejednakosti optimizacionog problema koji se rješava, ne postoji. Optimizacioni problem definisan na sledeći način:

$$\begin{gathered} \min\ s \\ f_i(x) \le s,\ \ i = 1, \ldots, m \\ \text{gdje je } Ax = b \end{gathered} \tag{4.39}$$

gdje $x \in R^n, s \in R$, naziva se *faza 1* i njegovim rješavanjem se dobija vrijednost početne tačke Barrier metoda.



Slika 4.4 Grafički prikaz Barrier metoda

5 Algoritam za optimizaciju rasporeda potrošnje električne energije

Nakon određivanja igre rasporeda potrošnje električne energije, uslova koje treba da zadovoljavaju kako potrošači, tako i funkcija cijene električne energije, kao i analize načina pogodnih za rješavanje optimizacionih problema, definisan je algoritam za optimizaciju rasporeda potrošnje električne energije. U osnovi ideje optimizacije rasporeda potrošnje električne energije je da algoritam bude implementiran u svakoj ECS-jedinici, koja se nalazi u pametnom brojilu svakog potrošača, kako bi isti bili u mogućnosti da učestvuju u igri optimizacije - Slika 5.1. Shodno prethodnoj analizi, a kao što će se vidjeti u rezultatima simulacija, potrošači, učesnici igre optimizacije rasporeda potrošnje električne enrgije, će itekako biti podstaknuti na saradnju.

Algoritam za optimizaciju sadrži sledeće korake:

- Inicijalizacija vektora l_n i l_{-n}
- Ponavljati naredne korake sve dok nijedna ECS jedinica ne objavi promjenu u rasporedu potrošnje električne energije:
- U nasumično odabranim vremenskim trenucima koristeći IPM metod [17] rješiti lokalni problem (5.3)
- Uporediti x_n sa trenutnim rasporedom potrošnje električne energije
- Ukoliko ima promjena, shodno njima ažurirati vektor x_n
- Slanjem kontrolne poruke obavijestiti ostale ECS jedinice o izmjenama u vektoru l_n
- Ažurirati vektor l_{-n}

gdje su: $\mathrm{l}_n \triangleq \left[l_n^1, \ldots, l_n^H\right]$, $\mathrm{l}_{-n} \triangleq \left[l_1 \ldots, l_{n-1}, l_{n+1}, \ldots, l_N\right]$, $\mathrm{x}_n = \left[\mathrm{x}_{\mathrm{n}1}, \mathrm{x}_{\mathrm{n}2} \ldots, \mathrm{x}_{\mathrm{na}}\right] a \in A_n$,

Pod pretpostavkom da svi ostali potrošači, izuzev potrošača $n \in N$, podese svoje vektore rasporeda potrošnje električne energije shodno rasporedu x_{-n}, rješavajući optimizacioni problem:

$$\max_{x_n \in \chi_n} P_n\left(x_n, x_{-n}\right), \tag{5.1}$$

dobija se optimalni raspored potrošnje električne energije potrošača $n \in N$, odnosno raspored potrošnje električne energije na osnovu kojega će n-ti potrošač plaćati najmanju cijenu. U (5.1) jedina promjenljiva koja se optimizuje jeste x_n.

Kao što smo već vidjeli Ω_n je konstantno i ne zavisi od vrijednosti vektora x_n:

$$\Omega_n \triangleq \frac{k \sum_{a \in A_n} E_{n,a}}{\sum_{m \in N} \sum_{a \in A_M} E_{m,a}},$$

pa se shodno tome (5.1) može napisati u sledećem obliku:

$$\min_{x_n \in X_n} \sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{m \in N} \sum_{a \in A_m} x_{m,a}^h \right), \tag{5.2}$$

odnosno:

$$\min_{x_n \in X_n} \sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h + \sum_{m \in N \setminus \{n\}} l_m^h \right). \tag{5.3}$$

Ovako definisan optimizacioni problem je konveksan i rješava se pomoću IPM metoda. Na osnovu (5.3) se može zaključiti da nam je za njegovo rješavanje, posmatrajući potrošača $n \in N$, potrebno da znamo kakvog je oblika funkcija cijene u svakom času, ali i vektor rasporeda dnevne potrošnje električne energije svih ostalih potrošača $l_{-n} \triangleq \left[l_1 ..., l_{n-1}, l_{n+1}, \ldots, l_N \right]$.

Na početku optimizacije vrši se inicijalizacija vektora l_n za sva domaćinstva, tj. vektora čiji su elementi vrijednosti potrošnje električne energije po času u toku jednog dana. Svaki korisnik definiše i uslove optimizacije za sve uređaje, tj. skup X_n. Nakon toga se vrši naizmjenična lokalna optimizacija pojedinačnih domaćinstava. Nakon završetka optimizacije rasporeda potrošnje električne energije n-tog domaćinstva, provjerava se da li je optimizacijom izmijenjen raspored njegove potrošnje x_n. Ukoliko jeste, na osnovu novih vrijednosti ažurira se vektor l_n, i obavještavaju ostala domaćinstva o izmjeni. Razmjena informacija među korisnicima, kao što je slanje poruke o promjeni vektora l_n, se vrši putem LAN-a ili nekom drugom vezom. Lokalna optimizacija se ponavlja sve dok nijedno domaćinstvo ne objavi promjenu u rasporedu potrošnje x_n, odnosno l_n. Na ovaj način, objavljivajući informacije o promjeni ukupne potrošnje električne energije po času, korisnici ne otkrivaju detalje o svojoj potrošnji, čime se štiti njihova privatnost, što je jedan od glavnih preduslova uspješne optimizacije. U [1] je vršena slučajna inicijalizacija l_n, dok smo u našoj realizaciji smatrali da se i na početku optimizacije ta informacija može razmijeniti među korisnicima i time ubrzati konvergencija algoritma.

Uzevši u obzir činjenicu da je optimizacioni problem (5.3) konveksan, kao i uvedene pretpostavke (2.6) i (2.7), osnova za rad optimizacionog algoritma jeste da su funkcije cijene (striktno) konveksne. Za dokaz konveksnosti funkcija cijene koje su korištene u tezi primijenjen je uslov drugog reda konveksnosti [15], koji je dat u 4.2. Isti uslov dat je u obliku teoreme [48], koja kaže: Svaka funkcija f, dvostruko diferencijabilna na $[a,b] \in R,$ je konveksna ako i samo ako je $f''(x) > 0$ za $a < x < b$.

Primjenivši ovaj uslov, tj. teoremu, na funkcije cijene realizovane u tezi, dokazi njihove konveksnosti bi bili sledeći:

Kvadratna funkcija cijene realizovana kao u [1] je oblika:

$$C_h(x) = \sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h + \sum_{m \in N \setminus \{n\}} l_m^h \right), \text{ za } C_h(x) = ax^2,\ a = const\, i\, a > 0,$$

iz čega slijedi da je:

$$C_h(x) = a \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h + \sum_{m \in N \setminus \{n\}} l_m^h \right)^2 .$$

Prvi izvod kvadratne funkcije cijene je:

$$C_h'(x) = 2a \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h + \sum_{m \in N \setminus \{n\}} l_m^h \right),$$

dok je drugi izvod:

$$C_h''(x) = 2a \geq 0,$$

što znači da je kvadratna funkcija cijene za $a = const \, i \, a > 0$, definisana na ovaj način, striktno konveksna, jer je drugi izvod funkcije uvjek veći od nule.

Modifikovana kvadratna funkcija cijene ima sledeći oblik:

$$C_h(x) = a \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h \right)^2 + a \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{m \in N \setminus \{n\}} l_m^h \right)^2 .$$

Prvi izvod modifikovane kvadratne funkcije cijene je:

$$C_h'(x) = 2a \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h \right),$$

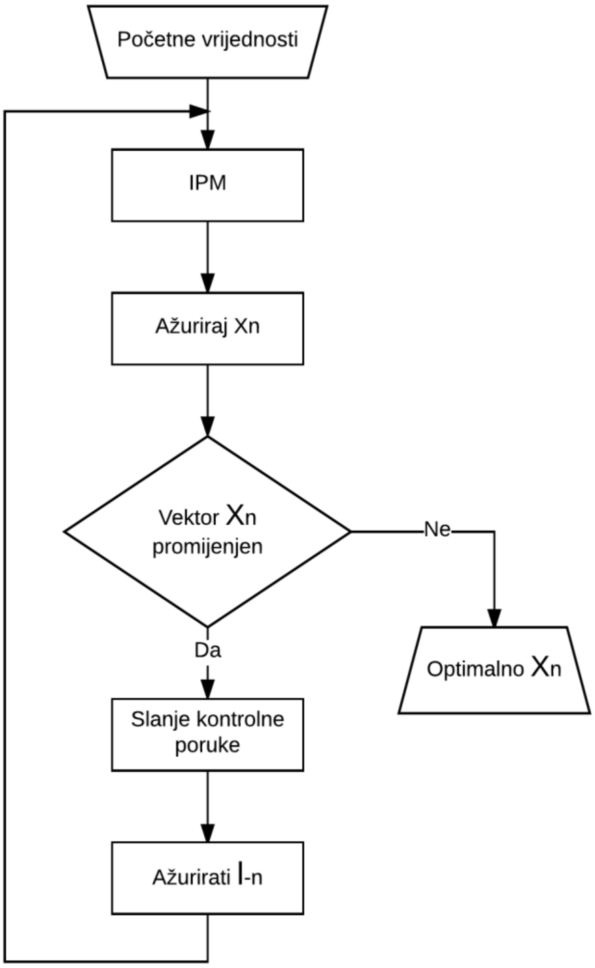
dok je drugi izvod:

$$C_h''(x) = 2a \geq 0,$$

što znači da je modifikovana kvadratna funkcija cijene za $a = const \, i \, a > 0$, definisana na ovaj način, striktno konveksna, jer je drugi izvod funkcije uvjek veći od nule.

Linearna funkcija cijene koja se koristi u simulacijama ima oblik $C_h\left(x_n\right) = ax_n$, gdje je $a = const$, i zavisi samo od perioda dana tj. od niže i više tarife. Drugi izvod ovako definisane linearne funkcije cijene je jednak 0 i ona je konveksna.

Modifikovana linearna funkcija cijene je istog oblika kao i linearna funkcija cijene $C_h\left(x_n\right) = ax_n$, ali kod nje vrijednost koeficijenta *a* zavisi kako od perioda dana, tako i od ukupne potrošnje svih domaćinstava ($\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \ldots + \mathrm{x}_\mathrm{n}$), tačnije od srednje vrijednosti potrošnje svih domaćinstava u času *h*, odnosno $a \neq const$. Ovakav način realizacije funkcije cijene ukida linearnost i dobijamo konveksnu funkciju. Ukoliko je potrošnja *n*-tog domaćinstva u času *h* veća od srednje vrijednosti potrošnje svih ostalih domaćinstava u času *h*, koeficijent *a* se povećava. Na taj način dobijamo rastuću funkciju cijene u zavisnosti od potrošnje.



Slika 5.1 Algoritam za optimizaciju rasporeda potrošnje električne energije

5.1 Osobine algoritma za optimizaciju rasporeda potrošnje električne energije

Teorema 4: Ukoliko su ažuriranja vektora rasporeda potrošnje električne energije potrošača asinhrona, odnosno ne postoje dva potrošača čiji će se vektori rasporeda potrošnje električne energije ažurirati u isto vrijeme, algoritam za optimizaciju rasporeda potrošnje električne energije konvergira Nash-ovom ekvilibrijumu igre rasporeda potrošnje električne energije.

Dokaz: Primjena najbolje strategije svakog potrošača, tj. učesnika igre rasporeda potrošnje električne energije, ujedno bi značila i rješenje optimizacionog problema (5.3). Samim tim, ukoliko bi potrošači redom u toku rada algoritma primjenjivali svoje najbolje strategije, prilikom svakog ažuriranja njihovog vektora rasporeda potrošnje električne energije, koji bi se dešavao u različitim vremenskim trenucima, cijena električne energije onih potrošača, učesnika igre rasporeda potrošnje električne energije, bi se ili smanjila ili ostala nepromijenjena. Uzimajući u obzir da je vrijednost cijene električne energije nenegativna, očigledno je da će ona konvergirati ka nekoj fiksnoj tački. Odstupanjem od dostignute fiksne tačke, a primjenjujući svoju najbolju strategiju, nijedan potrošač ne može profitirati, što samo po sebi ukazuje na to da je u toj tački dostignut Nash-ov ekvilibrijum igre rasporeda potrošnje.

Iz gore navedenog se može zaključiti da je sekvencijalno ažuriranje vektora rasporeda potrošnje električne energije dovoljan uslov konvergencije algoritma. Iz teorema 3 i 4 , a krenuvši od slučajno definisanih inicijalnih uslova, algoritam automatski konvergira optimalnom rješenju problema minimizacije cijene električne energije (2.12).

Teorema 5: Ukoliko su potrošači učesnici igre potrošnje električne energije, bilo koji potrošač $n \in N$ će prijavom lažnog rasporeda dnevne potrošnje električne energije l_n plaćati veću cijenu, odnosno nijedan potrošač ne može profitirati primjenom lažnog rasporeda potrošnje električne energije.

Dokaz: Sa $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N$ je označen Nash-ov ekvilibrijum igre rasporeda potrošnje električne energije podskupa potrošača $\mathrm{M} \subseteq N$, tj. onih potrošača koji prijavljuju lažni raspored potrošnje električne energije. Svi ostali potrošači $N \setminus \mathrm{M}$ prijavljuju tačan raspored potrošnje električne energije. Sa $x_1^*, \ldots, x_N^*$ je označeno optimalno rješenje optimizacionog problema (2.12). Shodno teoremi 3 $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N$ predstavlja Nash-ov ekvilibrijum igre, pod pretpostavkom da svi učesnici prijavljuju tačan raspored potrošnje električne energije. Kako bi potrošači iz skupa M profitirali potrebno je da sledeći uslov bude zadovoljen:

$$P_n\left(\overline{x}_n, \overline{x}_{-n}\right) \geq P_n\left(x_n^*, x_{-n}^*\right) \tag{5.4}$$

Ukoliko obje strane u (5.4) podijelimo sa $-\Omega_n$ dobićemo:

$$\sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{m \in N} \sum_{a \in A_m} \overline{x}_{m,a}^h \right) \leq \sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{m \in N} \sum_{a \in A_m} x^{*h}_{m,a} \right) \tag{5.5}$$

Dobijena nejednakost (5.5) je u suprotnosti sa pretpostavkom da $x_1^*, \ldots, x_N^*$ predstavlja optimalno rješenje optimizacionog problema (2.12). Može se zaključiti da bilo kakvim odstupanjem od rasporeda potrošnje električne energije, potrošač *n* ne može profitirati, odnosno cijena koju plaća za utrošenu električnu energiju neće biti najmanja optimalna.

Uzevši u obzir Teoremu 5, zaključuje se da bilo koja vrsta varanja u igri rasporeda potrošnje električne energije nije primamljiva potrošačima, tj. učesnicima igre, jer bi bilo koje odstupanje od optimalnih performansi sistema za optimizaciju i rezultata dobijenih njegovom primjenom naškodilo svim učesnicima igre, pa tako i onima koji varaju.

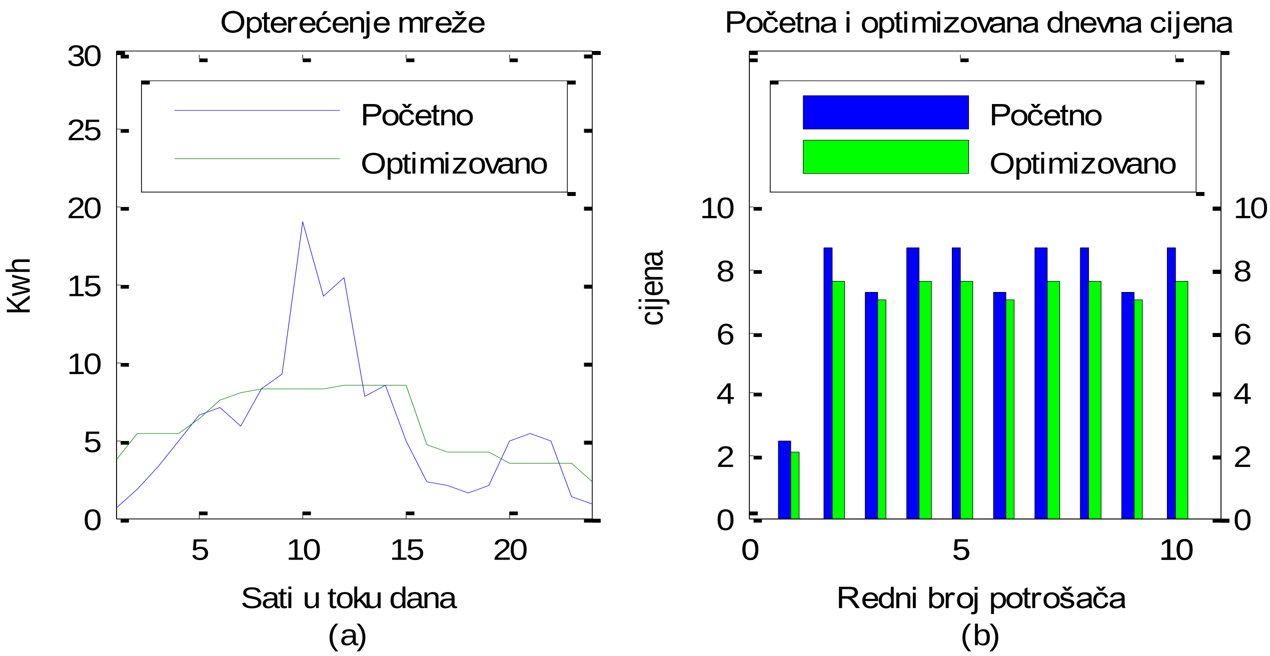
Prilikom rada na tezi korištena je, osim literature pod referencama navedenim kroz rad, i mnogobrojna literatura (ili neki njeni dijelovi) u kojima je rađena analiza pametne mreže, teorije igara i optimizacionih metoda, ali i dat pregled usko specijalizovanih oblasti vezanih za navedene teme [23]-[48][48]. U svim tim radovima se mogu naći smjernice kojima se može služiti u cilju dobijanja što boljih rezultata optimizacije. Za simulacije rađene u tezi koristili smo se nekima od njih, koje su i prethodno pomenute kroz rad, kao što su: različiti načini definisanja funkcije cijene, promjena perioda rada uređaja domaćinstava, zavisnost koeficijenta funkcije cijene u odnosu na ukupnu srednju potrošnju domaćinstava i td.

6 Simulacije

Predloženi načini modifikacije funkcije cijene električne energije $C_h(x)$ biće demonstrirani kroz nekoliko primjera. U svim simulacijama je analiziran uzorak od deset domaćinstava. Pretpostavlja se da domaćinstva posjeduju različit broj uređaja sa vremenski fiksiranim vremenom aktivacije, kao i sa vremenom aktivacije koje se može pomjerati u toku 24h. Cilj optimizacionog algoritma je da odredi vrijeme rada uređaja čije se vrijeme aktivacije, u zavisnosti od potreba potrošača, može mijenjati u toku 24h, tačnije da odredi optimalno vrijeme rada takvih uređaja u okviru perioda njihovog dozvoljenog rada koji je definisan skupom X. Optimizator nema uticaja na uređaje kojima je potrebno da rade 24h. U simulacijama će se koristiti kako linearna tako i kvadratna modifikacija funkcije cijene električne energije. U simulacijama u kojima se analizira linearna funkcija uzeto je u obzir da domaćinstva koriste dvotarifna brojila, kao i da cijena koju plaćaju zavisi od doba dana tj. niže ili više tarife.

Slika 6.1 prikazuje rezultate optimizacionog algoritma koji su dobijeni primjenom kvadratne funkcije cijene realizovane na način kao što je to urađeno u [1], a koji je služio kao osnova za tezu:

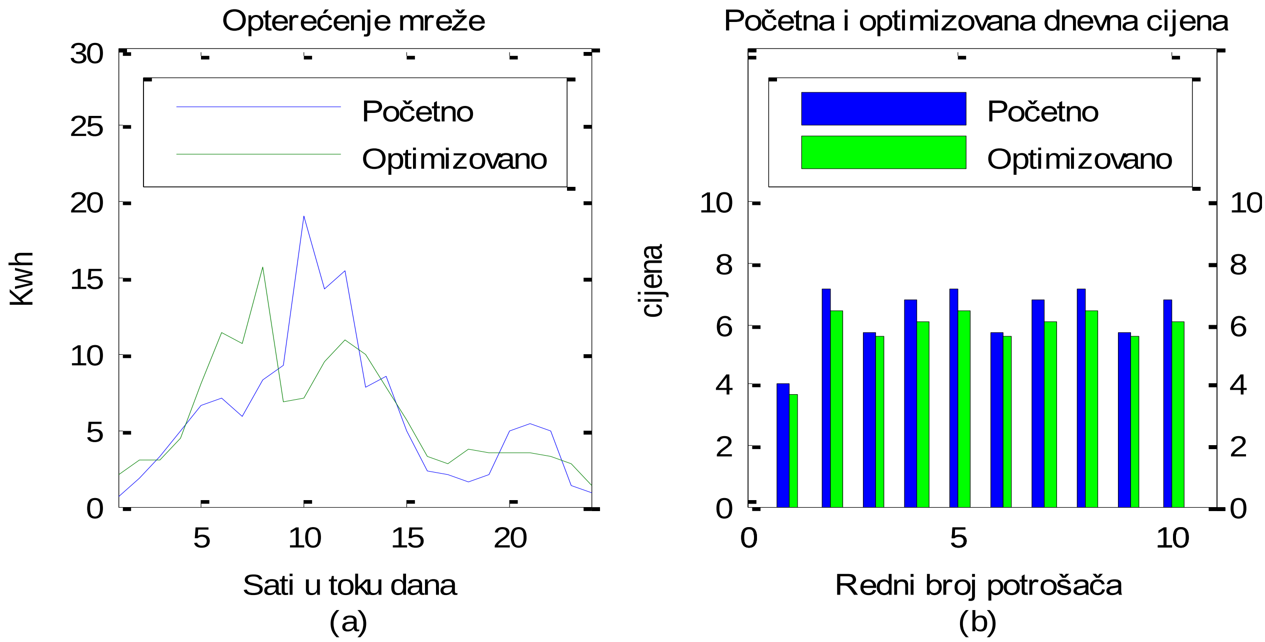
$$\underset{x_n \in X_n}{minimize} \sum_{h=1}^{H} C_h\left(\sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h + \sum_{m \in N \setminus \{n\}} l_m^h\right), \text{ gdje je } C_h(x) = ax^2 .$$



Slika 6.1 (a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi stupci) i optimizovana (zeleni stupci) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći kvadratnu funkciju cijene iz [1].

Pod gore prikazanom kvadratnom funkcijom cijene u prvom slučaju se nalazi suma rasporeda potrošnje pojedinačnog, kao i svih ostalih domaćinstava. Uzevši ovo u obzir, cijena koju plaća jedno domaćinstvo zavisi kako od rasporeda njegove, tako i od rasporeda potrošnje svih ostalih domaćinstava. Stoga se zaključuje da se u zavisnosti od rasporeda potrošnje svih ostalih domaćinstava određuje optimalan raspored potrošnje pojedinačnog domaćinstva. U tezi je u glavi

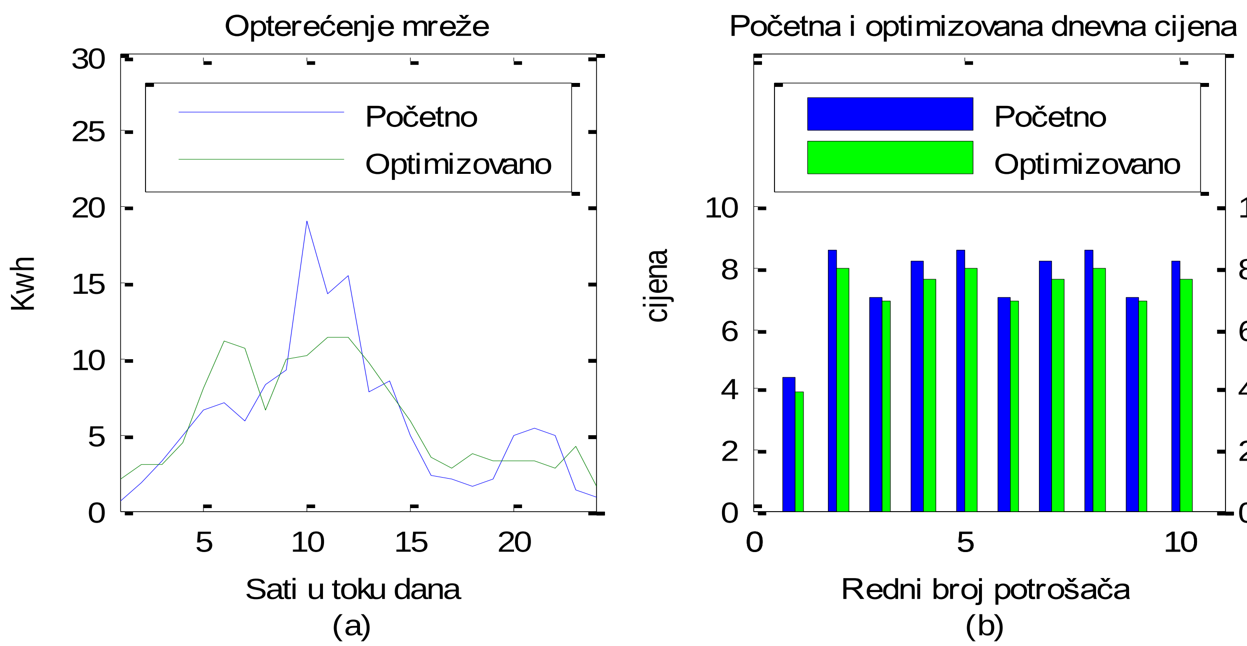
2 pomenuto da se upravo stvaranjem ovakve zavisnosti i ovakvim načinom definisanja funkcije cijene uvodi elemenat igre. Kada uporedimo dobijene rezultate optimizacije vidjećemo da je ovakav način realizacije funkcije cijene električne energije pažljivo biran u cilju dobijanja što boljih rezultata. Ukupno opterećenje mreže, čiji prikaz nam daje Slika 6.1(a), je primjetno manje nakon optimizacije. Pikovi koji se pojavljuju prije rada optimizacionog algoritma su smanjeni u značajnoj mjeri, što doprinosi stabilnosti elektro-distributivne mreže. Ukupna optimizovana dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava (zeleni stupci trakastog dijagrama) je manja od početne (plavi stupci trakastog dijagrama) što je prikazano na Slika 6.1(b). PAR je smanjen za 53.85%.



Slika 6.2 (a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi stupci) i optimizovana (zeleni stupci) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći linearnu funkciju cijene.

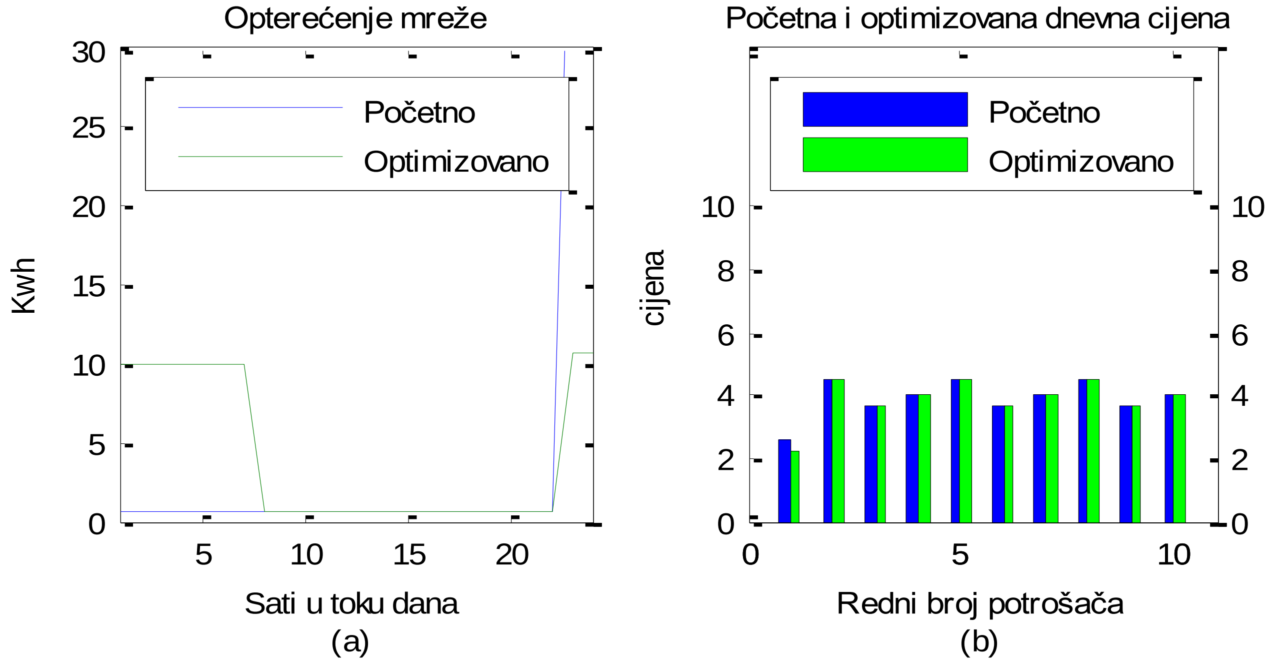
Slika 6.2 prikazuje rezultate optimizacionog algoritma koji su dobijeni primjenom linearne funkcije cijene čiji je oblik $C_h(x_n) = ax_n$ gdje je a koeficijent koji iznosi 0.5 centi/kwh za višu tarifu (VT), odnosno 0.2 centa/kwh za nižu tarifu (NT). Koeficijent potrošnje zavisi od doba dana. Pretpostavlja se da je u periodu od 23h-7h aktivna naplata niže, a u preostalom periodu dana više tarife. Ovako definisana funkcija cijene je ekvivalentna računanju cijene električne energije u Crnoj Gori. Optimizacioni metod koji koristi ovako definisanu linearnu funkciju će se u MATLAB-u realizovati pomoću *linprog* funkcije. Prikazan je rezultat optimizacije ukupnog opterećenja mreže u toku 24h (zelena linija), kao i njegova početna vrijednost (plava linija). Ukupno opterećenje mreže je u časovima više tarife smanjeno u odnosu na početnu vrijednost. Došlo je do peglanja pikova u časovima više tarife, ali i do očekivane pojave pikova u časovima niže tarife. Kažemo očekivane, jer je primjenom aktuelne linearne funkcije cijene električne energije predviđeno da potrošači upravo u časovima niže tarife uključuju uređaje sa vremenom aktivacije koje se može pomjerati u toku 24h. PAR se smanjio za 30.7% . Optimizovana dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava (zeleni stupci trakastog dijagrama) je manja od početne (plavi stupci trakastog dijagrama) što vidimo na Slika 6.2(b).

Primjenom aktuelne linearne funkcije cijene dolazi do pojave pikova u časovima niže tarife. Kako bismo pokušali da spriječimo ili barem ublažimo tu pojavu, urađena je modifikacije linearne funkcije cijene na način da se koeficijent potrošnje *a* mijenja ne samo u zavisnosti od perioda dana tj. niže i više tarife, već i u zavisnosti od srednje vrijednosti opterećenja u toku 24h - Slika 6.3. Srednja vrijednost opterećenja u stvari predstavlja prosječnu količinu utrošene energije svih domaćinstava u toku 24h. Kada je potrošnja domaćinstva u času *h* manja od prosječne količine utrošene energije svih domaćinstava u toku 24h, koeficijent potrošnje a iznosi 0.4 centa/kwh, dok je u suprotnom njegova vrijednost 0.65 centi/kwh. Iz navedenog slijedi da cijena koju potrošač plaća zavisi od potrošnje svih domaćinstava. Ovakav način realizacije funkcije cijene ukida linearnost i dobijamo konveksnu funkciju. Samim tim će se i način realizacije optimizacionog metoda koji koristi ovu funkciju u MATLAB-u realizovati primjenom *fmincon* funkcije, što predstavlja dodatnu razliku u odnosu na prethodno realizovanu linearnu funkciju. Ukupno opterećenje mreže je u časovima više tarife smanjeno u odnosu na početnu vrijednost što vidimo na grafiku Slika 6.3(a). Optimizovana dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava (zeleni stupci trakastog dijagrama) je i u ovom slučaju manja od početne (plavi stupci trakastog dijagrama) - Slika 6.3(b) . PAR se smanjio za 40%.



Slika 6.3 (a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi stupci) i optimizovana (zeleni stupci) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene.

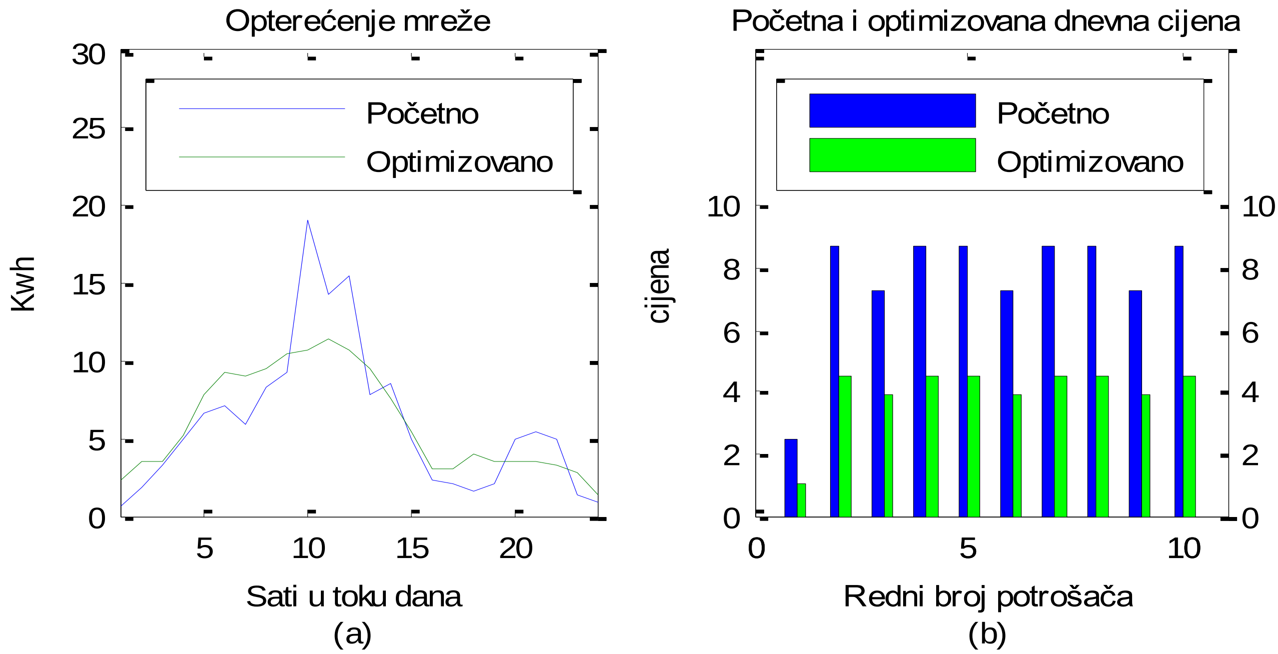
U cilju daljeg poboljšanja rezultata optimizacije urađena je još jedna modifikacija linearne funkcije cijene električne energije - Slika 6.4. Osim već realizovane zavisnosti cijene električne energije od više i niže tarife, kao i od srednje vrijednosti opterećenja u toku 24h, naredna modifikacije odnosi se na promjenu perioda aktivacije uređaja iz perioda više u period niže tarife. Povećanjem perioda u kojem je uređajima dozvoljeno da uređaji rade dobijamo mnogo bolje rezultate optimizacije. Oblik funkcije cijene ostaje isti $C_h(x_n) = a * x_n$.



Slika 6.4 (a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi stupci) i optimizovana (zeleni stupci) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene sa prilagođenim vremenom aktivacije.

Svaki od uređaja čije se vrijeme aktivacije može pomjerati u toku 24h postavljen je tako da može da radi samo u časovima niže tarife. I ovaj način realizacije funkcije cijene ukida linearnost, i kao i prethodni se u MATLAB-u realizuje pomoću *fmincon* funkcije. PAR se smanjio za 72%.

U tezi su analizirani i rezultati optimizacionog algoritma dobijeni modifikacijom kvadratne funkcije cijene.



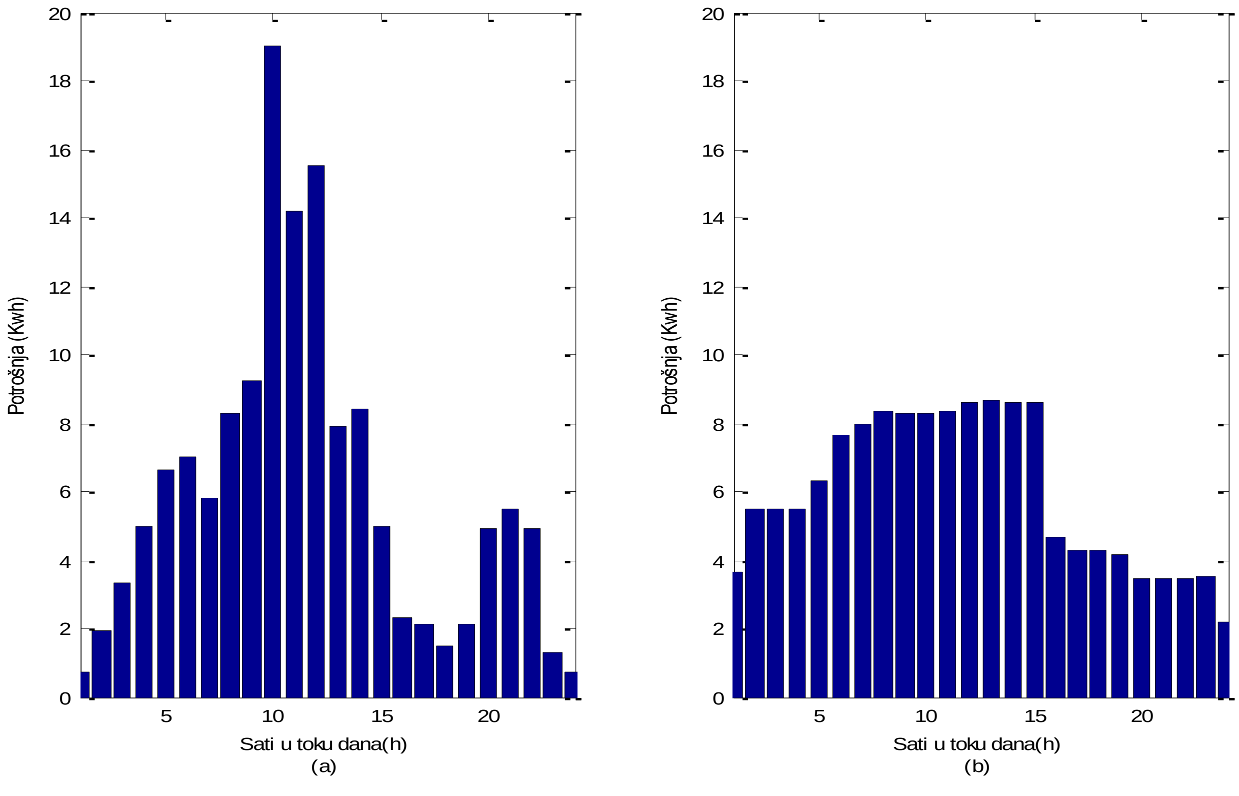
Slika 6.5 (a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi stupci) i optimizovana (zeleni stupci) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći modifikovanu kvadratnu funkciju cijene.

Slika 6.5 predstavlja rezultate dobijene korišćenjem kvadratne funkcije cijene električne energije. U ovome slučaju, za razliku od kvadratne funkcije realizovane kao u [1], cijena koju potrošači plaćaju zavisi samo od rasporeda lokalne potrošnje pojedinačnog domaćinstva, te se gube elementi igre. Cijene pojedinačnih domaćinstava se računaju nezavisno po formuli:

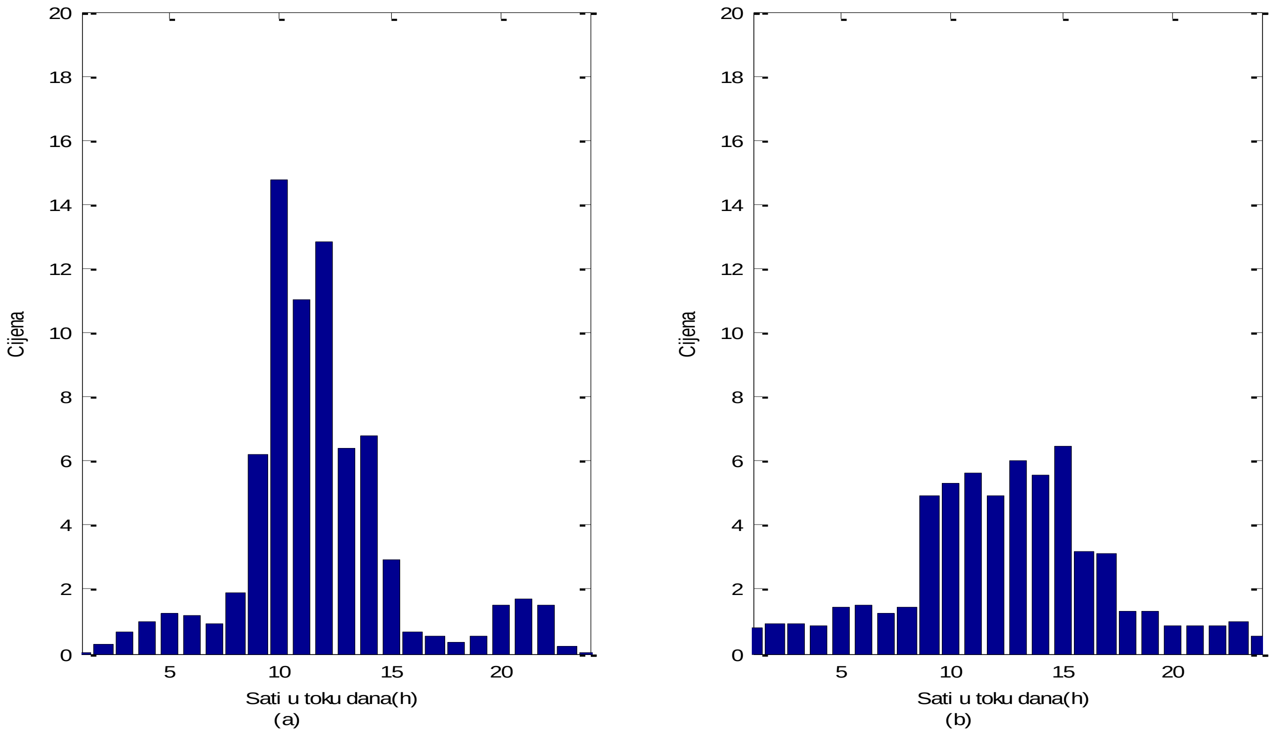
$$\min_{x_n \in X_n} \sum_{h=1}^{H} \left(C_h \left(\sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h \right) + C_h \left(\sum_{m \in N \setminus \{n\}} \mathrm{l}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{h}} \right) \right)$$

Slika 6.5(b) predstavlja optimizovanu cijenu pojedinačnih domaćinstava (zeleni stupci trakastog dijagrama) koja je gotovo za 50% manja od početne (plavi stupci trakastog dijagrama). Stabilnost mreže bi bila povećana jer bi se PAR optimizacijom smanjio za 46.15%. Uzevši ovo u obzir, potrošači bi u ovom slučaju bili i te kako podstaknuti na upotrebu predloženog metoda. Ovdje nema elemenata teorije igara.

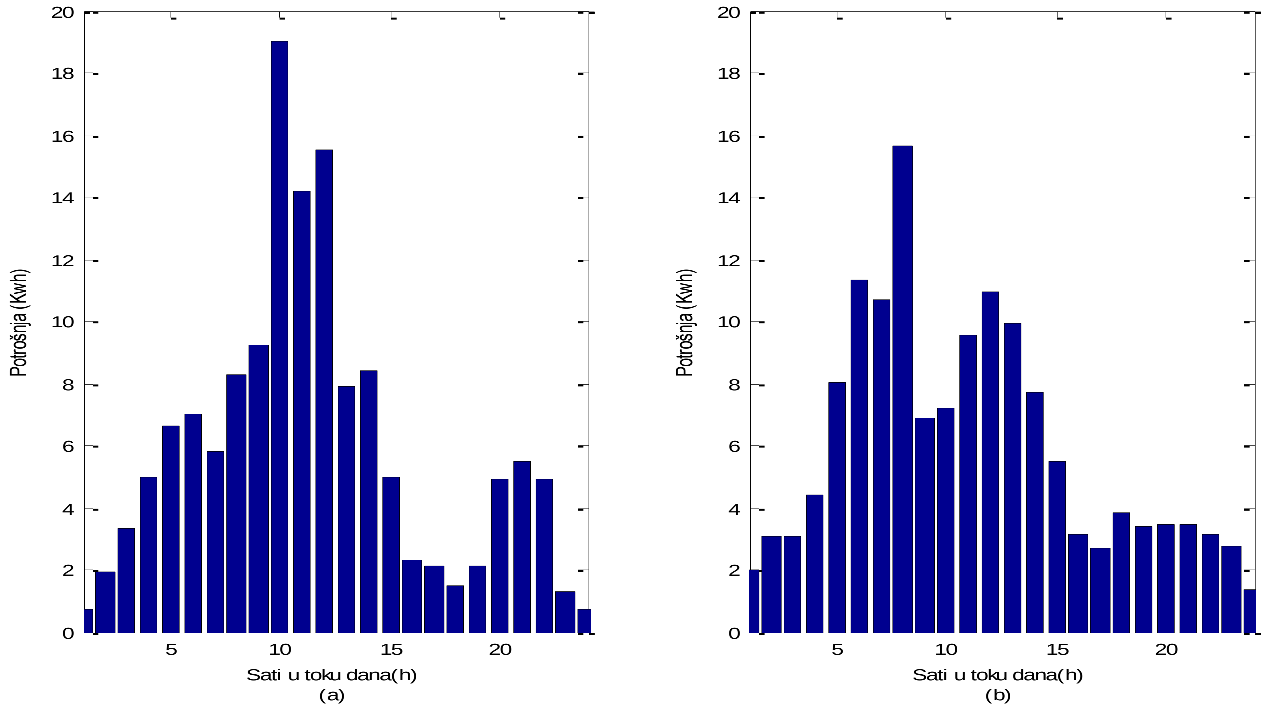
Kako bi se na još efikasniji način uporedile performanse sistema prije i nakon ugradnje ECS-a u tezi su prikazani grafici rasporeda ukupne potrošnje električne energije, kao i grafici preraspodjele cijene električne energije svih potrošača u toku 24h.



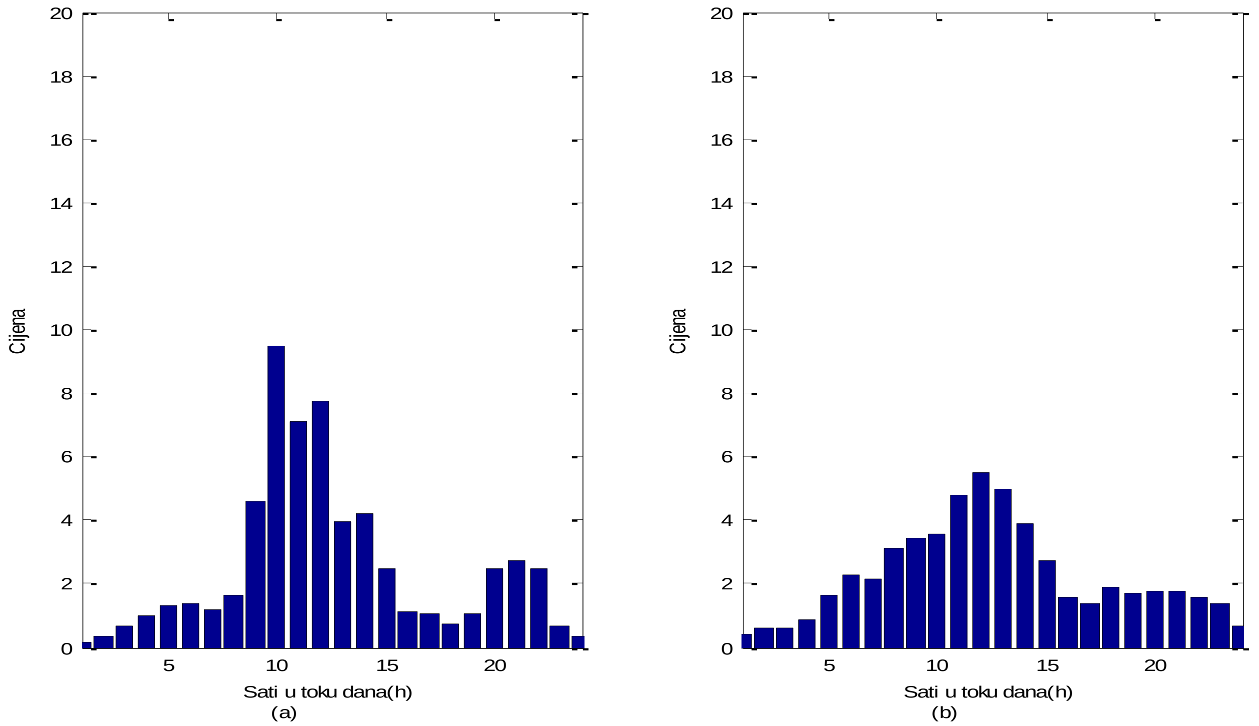
Slika 6.6 (a) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći kvadratnu funkciju cijene. (b) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći kvadratnu funkciju cijene.



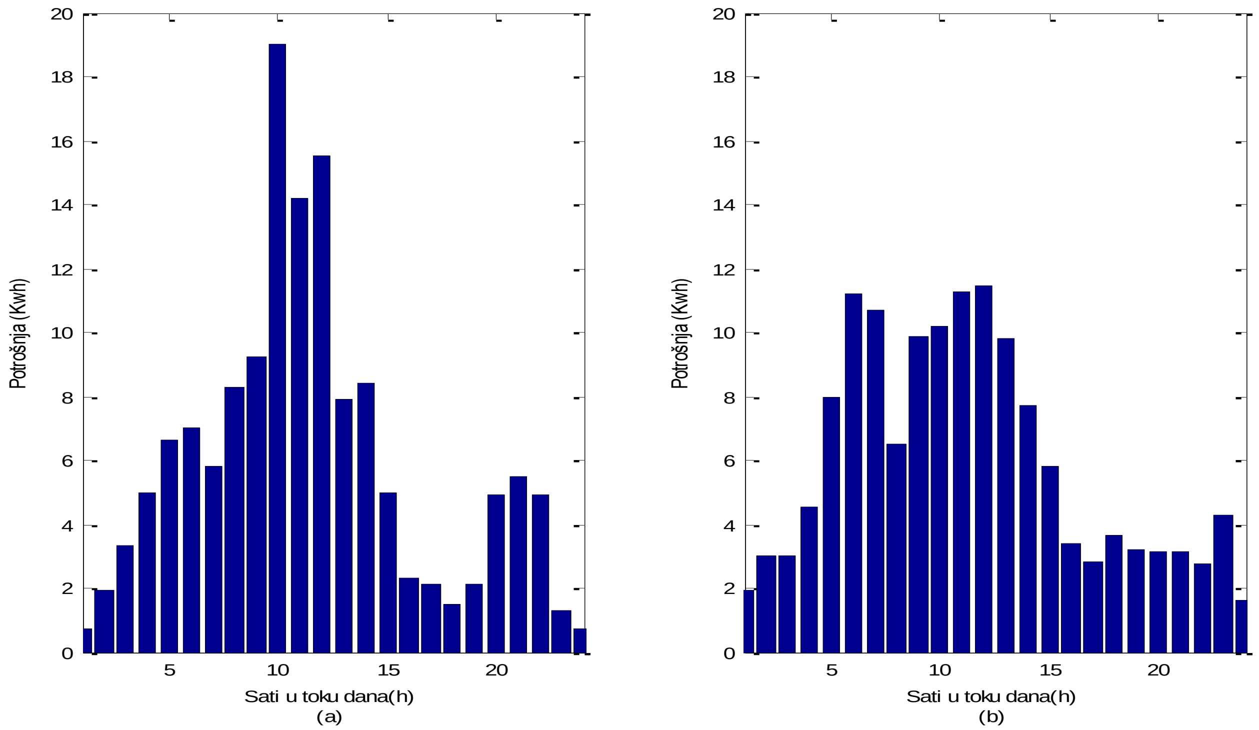
Slika 6.7 (a) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći kvadratnu funkciju cijene. (b) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći kvadratnu funkciju cijene.



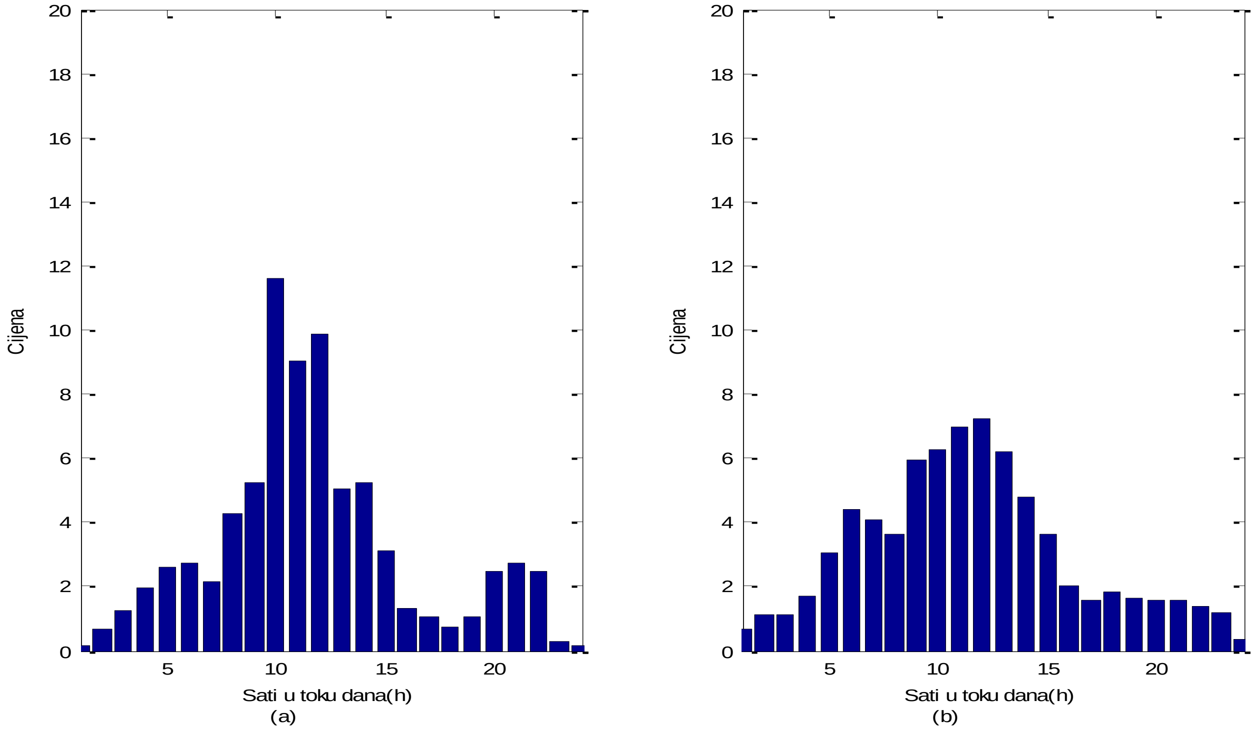
Slika 6.8 (a) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći linearnu funkciju cijene. (b) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći linearnu funkciju cijene.



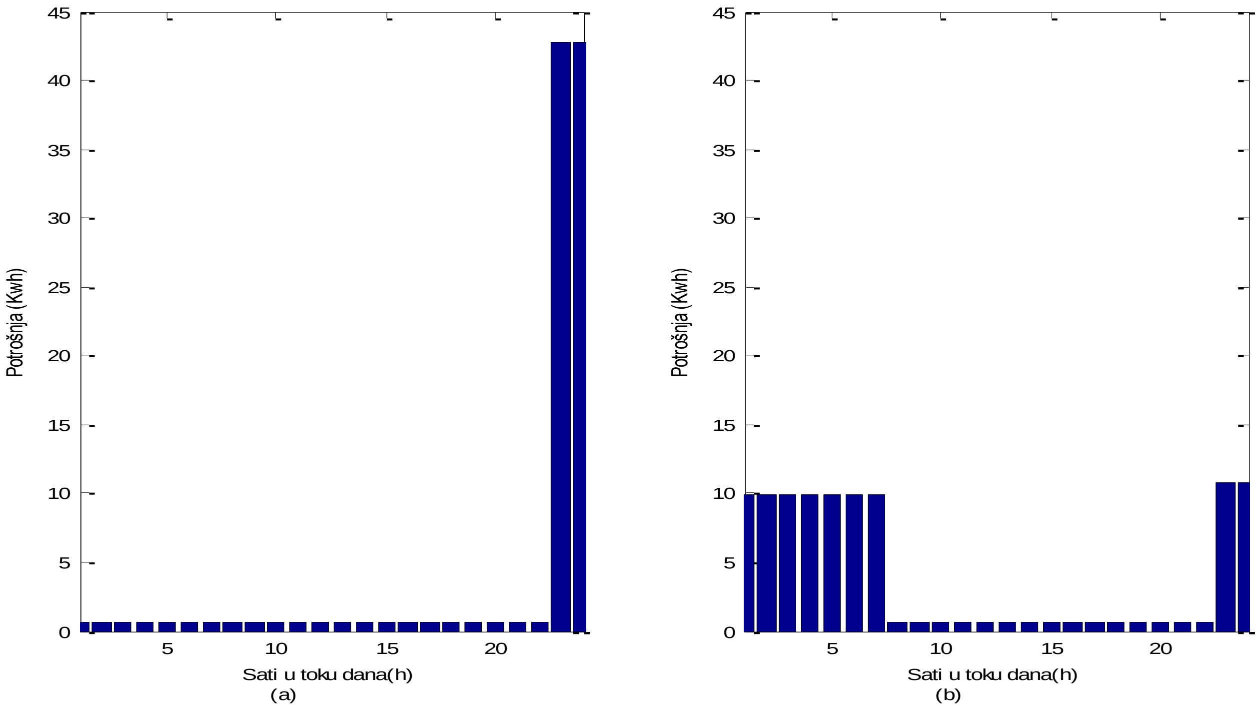
Slika 6.9 (a) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći linearnu funkciju cijene. (b) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći linearnu funkciju cijene.



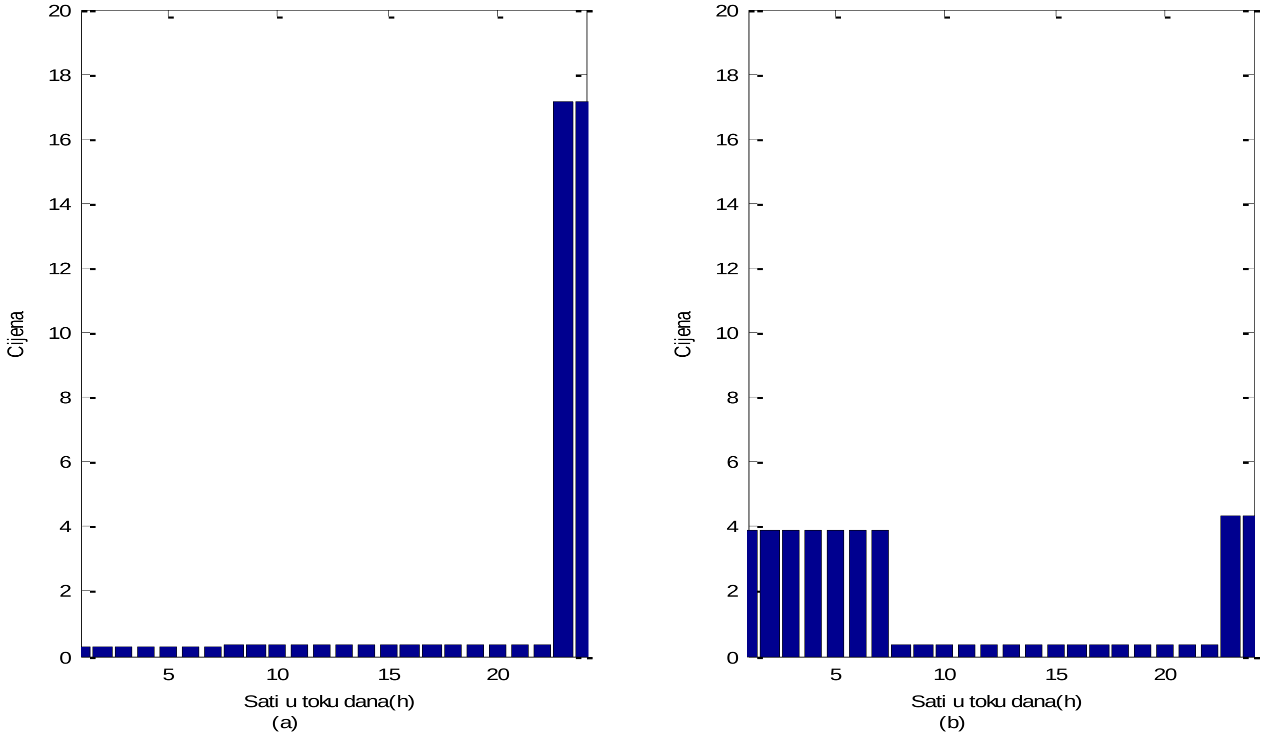
Slika 6.10 (a) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene. (b) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene.



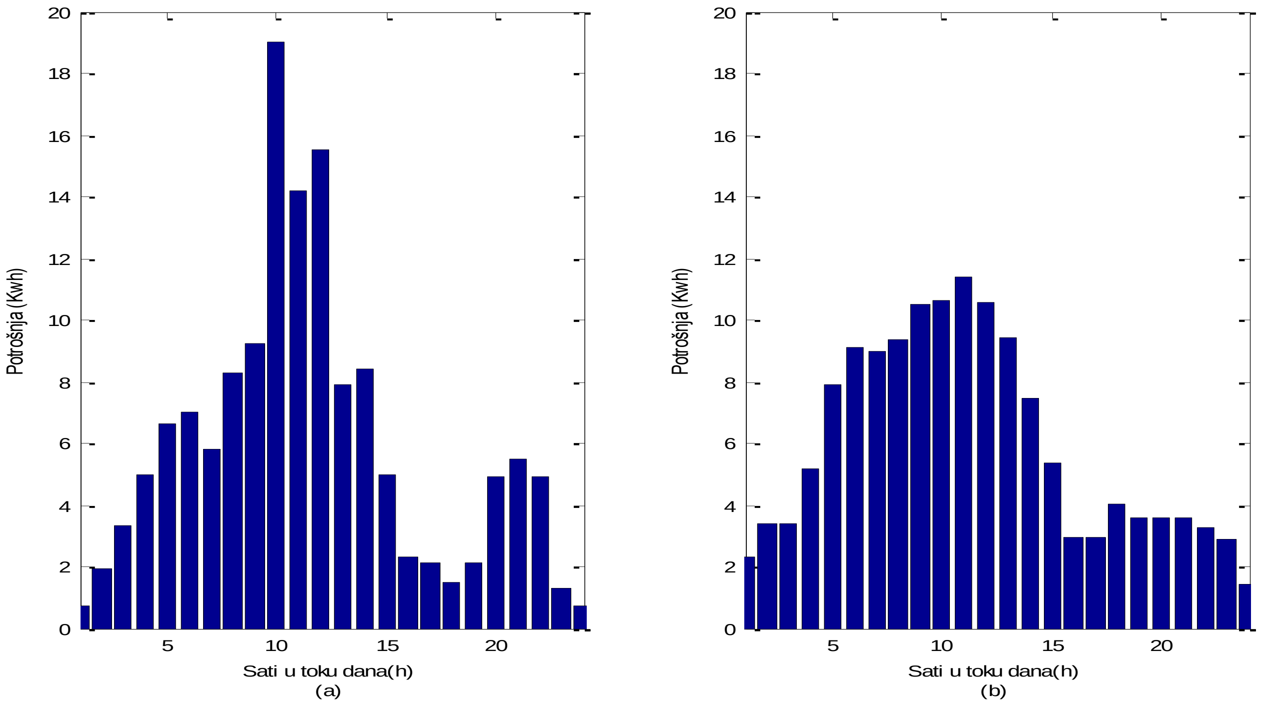
Slika 6.11 (a) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene. (b) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene.



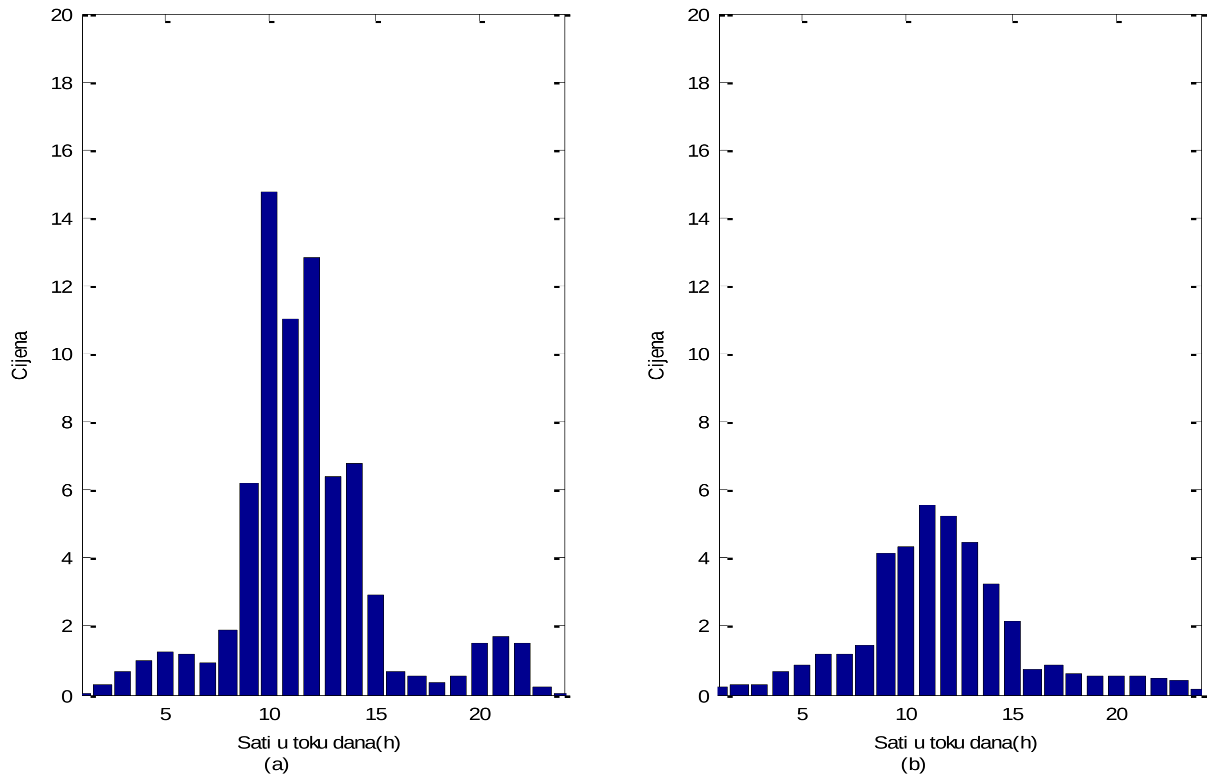
Slika 6.12 (a) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene sa prilagođenim vremenom aktivacije. (b) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene sa prilagođenim vremenom aktivacije.



Slika 6.13 (a) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene sa prilagođenim vremenom aktivacije. (b) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene sa prilagođenim vremenom aktivacije.



Slika 6.14 (a) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći modifikovanu kvadratnu funkciju cijene. (b) Raspored potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći modifikovanu kvadratnu funkciju cijene.



Slika 6.15 (a) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h prije optimizacije koristeći modifikovanu kvadratnu funkciju cijene. (b) Preraspodjela cijene električne energije svih potrošača u toku 24h nakon optimizacije koristeći modifikovanu kvadratnu funkciju cijene.

Na slikama od Slika 6.6 do Slika 6.15 prikazani su grafici rasporeda ukupne potrošnje i preraspodjele cijene električne energije svih domaćinstava u toku 24h, prije i nakon optimizacije, tj. prije i nakon upotrebe ECS-a. Bitno je naglasiti da se ukupna potrošnja pojedinačnih domaćinstava ne mijenja, već se u slučaju korišćenja ECS-a raspoređuje na najefikasniji način shodno algoritmu prikazanom na Slika 5.1, koji potrošačima osim smanjenja cijene koju plaćaju za utrošenu električnu energiju, obezbijeđuje i znatno bolje performanse sistema. Za slučaj simulacije rada domaćinstava koja u svojim pametnim brojilima nemaju ugrađen ECS, predpostavlja se da svaki uređaj svakog domaćinstva započinje rad na početku definisnog dozvoljenog perioda rada $\left\{\alpha_{n,a}, \beta_{n,a}\right\}$ i sa dozvoljenim nivoom snage, dok su u slučaju simulacije rada domaćinstava koja u svojim pametnim brojilima imaju ugrađen ECS, vrijeme rada kao i nivo snage svakog uređaja određeni radom optimizacionog algoritma. Osim prethodno realizovanih grafika rasporeda potrošnje i odgovarajuće preraspodjele cijene u toku 24h.

Realizacija optimizacionog metoda u MATLAB-u, i primjena različitih modifikacija funkcije cijene zahtjeva računanje gradijenta i Hesijana tih istih funkcija. Način računanja, kao i sama vrijednost gradijenta i Hesijana znatno utiču na performanse algoritma, stoga se način njihove realizacije mora pažljivo odabrati. Gradijent i Hesijan se mogu proslijediti funkciji *fmincon* na više načina. Ukoliko se gradijent i Hesijan funkcije koja se optimizuje mogu izračunati, oni se moraju izračunati u okviru realizacije funkcije cijene i biti izlazni argument te funkcije, što je i učinjeno u gore navedenim simulacijama. Ukoliko korisnik ne definiše izračunavanje gradijenta i Hesijana objektivne funkcije u oviru njene ralizacije, funkcija *fmincon* ima nekoliko ugrađenih načina njihove realizacije koji se mogu primjeniti i sa kojima se mogu dobiti dobri rezultati simulacija.

Zaključak

Uzimajući u obzir analizu rezultata svih simulacija možemo zaključiti da bi predloženi optimizacioni algoritam i te kako našao svoju primjenu, kao i da bi potrošači bili podstaknuti na njegovo korišćenje. Za razliku od većine DSM sistema koji zavise od interakcije snabdijevača i svakog krajnjeg potrošača, ovako realizovan DSM sistem, koji bi koristio algoritam predložen u tezi, zavisi u najvećoj mjeri od interakcija među samim potrošačima. Pod interakcijama podrazumijevamo razmijenu informacija. Kako bi potrošači korišćenjem predloženog algoritma ostvarili svoju maksimalnu dobit neophodno je da među sobom razmijene 'poruke' koje neće otkrivati detalje o njihovoj potrošnji, pa samim tim ni njihova privatnost ne može biti ugrožena. Ovakav sistem za upravljanje potrošnjom električne energije rezultirao bi smanjenjem iznosa koji potrošači plaćaju, kao i smanjenjem PAR-a, odnosno većom stabilnošću mreže nego što je to sada slučaj. Osim mnogobrojnih prednosti pametne mreže kao takve, ovakav sistem bi omogućio da potrošači uz maksimalno iskorišćenje kapaciteta postojeće elektro-energetske mreže smanje iznos koji plaćaju za utrošenu električnu energiju. Način definisanja funkcije cijene je od presudnog značaja za performanse algoritma stoga se tome mora posvetiti posebna pažnja.

Analizom grafika dobijenih primjenom 5 različitih realizacija funkcije cijene, možemo zaključiti da direktna primjena trenutno aktuelne linearne funkcije cijene ne bi dala optimalne rezultate. Primjena linearne funkcije cijene bi dovela do automatskog uključivanja uređaja u vrijeme niže tarife, što ne bi znatno izmijenilo već postojeću situaciju jer i sada većina domaćinstava u Crnoj Gori najveći dio potrošnje električne energije obavlja upravo u časovima niže tarife. Veliki dio perioda dana u kojem je aktuelna niža tarifa bi ostao neiskorišćen, a ujedno bi došlo i do pojave pikova u početnim časovima niže tarife.

Modifikacijom aktuelne liearne funkcije cijene, tako da ona zavisi kako od perioda dana, tako i od srednje vrijednosti opterećenja u toku 24h, kao rezultat se dobija veće smanjenje PAR-a, pikovi u časovima niže tarife su bolje 'ispeglani', a i cijena koju potrošači plaćaju je manja u odnosu na početnu. Najbolji rezultati optimizacionog algoritma u smislu povećanja stabilnosti mreže se dobijaju ukoliko se uz pomenuta dva uslova poveća i vremenski period u kojem je uređajima dozvoljeno da rade. Inicijalni uslovi potrošnje modifikovane linearne funkcije cijene sa prilagođenim vremenom aktivacije, određuju uključivanje uređaja samo u časovima niže tarife što je najbliže aktuelnom načinu aktivacije uređaja potrošača.

Kodovi

Prvi fajl predstavlja IPM metod, za čiju smo realizaciju u Matlabu koristili *fmincon* funkciju. Ovaj kod, u zavisnosti od objektivne funkcije, tj. cijene koja se optimizuje, kreira grafike opterećenja mreže prije i nakon optimizacije, grafike početne i optimizovane dnevne cijene pojedinačnih domaćinstava, grafik rasporeda potrošnje električne energije svih potrošača u toku 24h, kao i grafik preraspodijele cijene električne energije svih potrošača u toku 24h.

```
global A b YmaX0 Ymin X0 %inicijalizacija globalnih promjenljivih

%definisanje broja uređaja za svako domaćinstvo
% init_variables 5 svaki od uređaja radi u časovima niže tarife - ove početne uslove koristi modifikovana linearna funkcija cijene sa prilagođenim vremenom aktivacije

% nn1 = 7;
% nn2 = 8;
% nn3 = 7;
% nn4 = 7;
% nn5 = 8;
% nn6 = 7;
% nn7 = 8;
% nn8 =8;
% nn9 = 8;
% nn10= 8;

% init_variables - početni uslovi koje koriste kvadratne funkcije cijene, kao i linearna i modifikovana linearna funkcija cijene

nn1 = 5;
nn2 = 6;
nn3 = 5;
nn4 = 5;
nn5 = 6;
nn6 = 5;
nn7 = 5;
nn8 = 6;
nn9 = 5;
nn10 = 5;

%vektor čiji su elementi broj uređaja svakog domaćinstva pojedinačno
nnk = [nn1, nn2, nn3, nn4, nn5, nn6, nn7, nn8, nn9, nn10];

YmaX0 = zeros(sum(nnk) * 24, 1); %maximalna potrošnja uređaja u standy režimu
Ymin = zeros(sum(nnk) * 24, 1); %minimalna potrošnja uređaja u standy režimu
```

```
X0 = zeros(sum(nnk) * 24, 1); %potrošnja uređaja po satu
A = zeros(sum(nnk), sum(nnk) * 24); % matrica koja određuje period rada uređaja
b = zeros(sum(nnk), 1); %ukupna potrošnja uređaja

init_variables;

X = X0;
brkorisnika = 10; %broj domaćinstava
k = 1;
p = 10;
prbrur = 0; %brojuređaja
Xstaro = zeros((sum(nnk)) * 24, 1);
%gradgrad=[]; %gradijent optimizacione funkcije

cijene = [];

while sum(abs(X) - abs(Xstaro)) ~= 0
    Xstaro = X;
    while (k <= p)
        s = nnk(k);

        [xk, Ak, bk, Ymink, Ymaxk] = parametri_optimizacije(X, s, prbrur);

        lm = zeros(1, 24 * brkorisnika);
        prbrur1 = 0;

        %kreiranje vektoraLN
        for m = 1:brkorisnika
            if m ~= k
                brelem = nnk(m);
                lmm = kreirajLN(X, brelem, prbrur1);
                lm(24 * (m - 1) + 1:24 * m) = lmm;
            end
            prbrur1 = prbrur1 + nnk(m);
        end

        options = optimset('Algorithm', 'interior point', 'Gradobj', 'on', 'Hessian', 'on', 'HessFcn', @hesijan_funkcije);

        handlerFun = @(xk)kvadr_fun (xk, lm)

        [xk, fval, exitflag, output, lambda, grad, hessian] = fmincon(handlerFun, xk, [], [], Ak, bk, Ymink, Ymaxk, [], options);
        s = nnk(k);

        %gradgrad=[gradgrad;grad];  %  za formiranje gradijenta modifikovane linearne funkcije

```

```
            X(prbrur * 24 + 1:(prbrur + s) * 24) = xk;

            prbrur = prbrur + s;
            k = k + 1;

            sum(sum(X));
        end
    end
    %grafik
    %Graf_rasporeda_cijene
    %Graf_rasporeda_potros
```

Ovaj fajl prikazuje realizaciju kvadratne funkcije cijene (5.3).

```
function [s, g] = kvadr_fun(xk, lm)
g = zeros(1, length(xk));
p = zeros(1, 24);
x_k = zeros(1, 24);
l_n = zeros(1, 24);

for i = 1:24
    x_k(i) = sum(xk(0 + i:24:length(xk)));
end
for i = 1:24
    l_n(i) = sum(lm(0 + i:24:length(lm)));
end

s = sum(9 / 1600 * ((x_k + l_n) .^ 2)); %funkcija cijene zavisi kako od rasporeda potrošnje lokalnogtako i od rasporeda potrošnje svih ostalih domaćinstava

brel = length(xk) / 24; %broj elemenata domaćinstva n

if nargout > 1
    for j = 1:24
        for k = 0:brel - 1
            p(j) = p(j) + (xk(j + k * 24));
        end
        p(j) = p(j) + l_n(j);
        p(j) = 2 * 9 / 1600 * p(j);
    end

    for i = 1:24
        g(i:24:length(g)) = p(i);
    end
end
end
```

Literatura

[1] A. Mohsenian-Rad, V. Wong, J. Jatskevich, R. Schober, and A. Leon-Garcia, “Autonomous demand-side management based on game theoretic energy consumption scheduling for the future smart grid,” *Smart Grid, IEEE Transactions on*, vol. 1, no. 3, pp. 320 –331, dec. 2010.

[2] F. Berman, G. Fox and A. J. G. Hey, *Grid Computing: Making the Global Infrastructure a Reality*, 2003 :Wiley

[3] U.S Department of energy, *The Smart Grid: An Introduction*, 2009

[4] A. Ipakchi and F. Albuyeh, “Grid of the future”, *IEEE Power and Energy Magazine*, pp. 52-62, Mar. 2009

[5] James Momoh, *SMART GRID Fundamentals of Design and Analysis*, April 2012: Wiley-IEEE Press

[6] C. W. Gellings and J. H. Chamberlin *Demand Side Management: Concepts and Methods*, 1993 :PennWell Books

[7] C. Triki and A. Violi, “Dynamic pricing of electricity in retail markets”, Quarterly Journal of Operations Research, vol. 7, no. I, pp. 21-36, Mar.2009

[8] Aoife Brophy Haney, Tooraj Jamasb, Laura M. Platchkov, Michael G. Pollitt, *Demand-side Management Strategies and the Residental Sector: Lessons from International Expirience*, EPRG Working paper 1034

[9] D. Fudenberg, J. Tirole, *Game Theory*, The MIT Press, 1991

[10] John Nash, *Non-Cooperative Games*, The Annals of mathematics, Second series, Volume 54, Issue 2, (Sep., 1951), 286-295

[11] Walid Saad, Zhu Han, H. Vincent Poor, Tamer Basar, *Game Theoretic Methods for the Smart Grid 2*

[12] R. Gopalakrishnan, J. R. Marden, A. Wierman, “An architectural view of game theoretic control”, *ACM SIGMETRICS PerformancevEvaluation Review*, vol. 38, no. 3, pp. 31–36, Dec. 2010.

[13] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007.

[14] Ed Koch, Tariq Samad, *Demand response and Energy Efficiency for the Smart Grid*, Stanford University, 16 May 2011.

[15] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

[16] D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.

[17] Haitham Hindi, Paolo Alto, "A Tutorial on Convex Optimization II: Duality and Interior Point Methods", California 94304.

[18] Maria G Villarreal, "Optimization Algorithms in MATLAB", ISE Department The Ohio State University, February 03, 2011.

[19] TU-Ilmenau, Dr. Abebe Geletu, "Solving Optimization Problems using the Matlab Optimization Toolbox – a Tutorial", December 13, 2007.

[20] Wenting Zhao, Lijin Wang, Yilong Yin, Bingqing Wang, Yi Wei, Yushan Yin, "An Improved BacktrackingSearch Algorithm for Constrained Optimization Problems", R. Buchmann et al. (Eds.): KSEM 2014, LNAI 8793, pp. 222–233, 2014. © Springer International Publishing Switzerland 2014.

[21] Robert M. Freund, "Penalty and Barrier Methods for Constrained Optimization", February, 2004.

[22] J.B. Rosen, "Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games", *Econometrica*, vol. 33, pp. 347-351, 1965.

[23] Schleich Joachim, Klobasa Marian, Brunner Marc, Gölz Sebastian, Götz Konrad, *Smart metering in Germany and Austria: Results of providing feedback information in a field trial,* Working Paper Sustainability and Innovation No. S 6/2011.

[24] Nicola Capodieci, Giacomo Cabri, Giuliano Andrea Pagani, Marco Aiello, "Adaptive Game-based Agent Negotiation in Deregulated" Energy Markets", (EU FP7-FET, Contract No. 257414).

[25] *BASIC RESEARCH NEEDS FOR ELECTRICAL ENERGY STORAGE*, Report of the Basic Energy Sciences Workshop For Electrical Energy Storage, Office of Basic Energy Sciences Department of Energy July 2007.

[26] D. Fudenberg, D. Levine, *The Theory of Learning in Games*, MIT Press, Cambridge, MA, 1998.

[27] L. Pavel, *An extension of duality to a game-theoretic framework, Automatica*, 43:226237, 2007.

[28] J. A. Nelder, R. Mead, *A simplex method for function minimization*, Computer Journal, V. 7, pp. 308-313, 1965.

[29] R. E. Brown, Impact *of smart grid on distribution system design*, *IEEE Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century*, pages 1–4, 2008.

[30] S. Gormus, P. Kulkarni, Z. Fan, *The power of networking: How networking can help power management*, *IEEE SmartGridComm'10*, pages 561–565, 2010.

[31] C. Efthymiou, G. Kalogridis, *Smart grid privacy via anonymization of smart metering data, IEEE SmartGridComm'10*, pages 238–243, 2010.

[32] European Committee for Electrotechnical Standardization (CENELEC), *Smart Meters Coordination Group: Report of the second meeting held on 2009-09-28 and approval of SM-CG work program for EC submission*, 2009.

[33] European SmartGrids Technology Platform, *Vision and strategy for Europe's electricity networks of the future*, http://www.smartgrids.eu/ documents/vision.pdf. 2006.

[34] H. Farhangi, *The path of the smart grid*, *IEEE Power and Energy Magazine*, 8(1):18–28, 2010.

[35] P. Zhang, F. Li, N. Bhatt, *Next-generation monitoring, analysis, and control for the future smart control center*, *IEEE Transcations on Smart Grid*, 1(2):186–192, 2010.

[36] Office of Energy Efficiency, Natural Resources Canada, *Energy Consumption of Household Appliances Shipped in Canada*, Dec. 2005.

[37] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *Lectures on Modern Convex Optimization. Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

[38] J.B. Hiriart-Urruty, C. Lemar´echal, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer, 2001. Abridged version of *Convex Analysis and Minimization Algorithms* volumes 1 and 2.

[39] S Hunt, *Making competition work in electricity*, Wiley, 2002.

[40] M.J. Osborne, A. Rubinstein, *A course in game theory*, The MIT press, 1994. ISBN 0262650401.

[41] E. Çelebi, J. D. Fuller, “A model for efficient consumer pricing schemes in electricity markets,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 22, no.1, pp. 60–67, Feb. 2007.

[42] L. Exarchakos, M. Leach, G. Exarchakos, Modelling *electricity storage systems management under the inuence of demand-side management programmes*, International Journal of Energy Research, 33(1):62-76, 2009.

[43] Civicioglu, P., *Backtracking search optimization algorithm for numerical optimization problems*, Applied Mathematics and Computation 219, 8121–8144 (2013).

[44] Wang L., Zhong Y., *A modified group search optimiser for constrained optimization problems*, Int. J. Modelling, Identification and Control 18, 276–283 (2013).

[45] A. B. MacKenzie, L. A. DaSilva, *Game Theory for Wireless Engineers*, Morgan & Claypool Publishers, 2006.

[46] H. Li, M. Singhal, "Trust Management in Distributed Systems," *Computer,* pp. 45-53, 2007.

[47] D. Coll-Mayor, M. Paget, E. Lightner, *Future intelligent power grids: Analysis of the vision in the European Union and the United States*, *Energy Policy*, pages 2453–2465, 2007.

[48] Naneh Apkarian, *Convex Functions Thms and Proofs*, Math 187 - spring 2013.