



UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Tamara Pejaković

- Magistarski rad -

***ALGORITMI ZA REKONSTRUKCIJU SIGNALA SA
POLINOMIJALNIM I SINUSOIDALNIM FAZNIM MODULACIJAMA***

Podgorica, Februar 2016.

PODACI I INFORMACIJE O MAGISTRANDU

Ime i prezime: Tamara Pejaković

Datum rođenja: 18.01.1991. godine u Podgorici

Naziv završenog osnovnog studijskog programa: Elektronika, Telekomunikacije i Računari

Naziv završenog specijalističkog studijskog programa: Elektronika, Telekomunikacije i Računari, smjer Računari

INFORMACIJE O MAGISTARSKOM RADU

Naziv postdiplomskih studija: Elektronika, Telekomunikacije i Računari, smjer Računari, modul Multimedijalni signali i sistemi

Naslov rada: „ALGORITMI ZA REKONSTRUKCIJU SIGNALA SA POLINOMIJALNIM I SINUSOIDALNIM FAZNIM MODULACIJAMA“

Fakultet: Elektrotehnički fakultet Podgorica

UDK, OCJENA I ODBRANA MAGISTARSKOG RADA

Datum prijave magistarskog rada: 03.04.2015. godine

Datum sjednice Vijeća na kojoj je prihvaćena tema: 29.10.2015. godine

Komisija za ocjenu teme i podobnosti magistranda:

- Prof. dr Srdjan Stanković,
- Prof. dr Miloš Daković,
- Prof. dr Nedjeljko Lekić

Mentor: Prof. dr Srdjan Stanković

Komisija za ocjenu rada:

- Prof. dr Srdjan Stanković,
- Prof. dr Miloš Daković,
- Prof. dr Nedjeljko Lekić

Komisija za odbranu rada:

- Prof. dr Srdjan Stanković,
- Prof. dr Miloš Daković,
- Prof. dr Nedjeljko Lekić

Datum odbrane: 09.02.2016. godine

Datum promocije: _____

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Compressive Sensing	3
2.1 Sparsiti i transformacioni domeni.....	4
2.1.1 Diskretna Furijeova transformacija.....	6
2.2 Restricted isometry property (RIP) i mjerenja u CS-u	8
2.2.1 Mjerenja u Compressive Sensingu	8
2.2.2 Matrica mjerenja i Restricted isometry property (RIP).....	9
3. COMPRESSIVE SENSING ALGORITMI ZA REKONSTRUKCIJU	11
3.1 Problem Compressive sensing-a.....	11
3.2 L_1 minimizacioni algoritam.....	12
3.2.1 Norma vektora	12
3.2.2 Minimizacija L_1 norme.....	14
3.2.3 Varijante algoritma – minimizacija L_1 norme	17
3.3 Algoritam sa metodom pretraživanja na osnovu ortogonalnog podudaranja (<i>Orthogonal Matching Pursuit -OMP</i>)	19
3.3.1 Metod pretraživanja na osnovu podudaranja (<i>Matching Pursuit</i>)	19

3.3.2	Algoritam sa metodom pretraživanja na osnovu ortogonalnog podudaranja (<i>Orthogonal Matching Pursuit - OMP</i>)	22
3.4	Iterativni algoritam sa pragovanjem (IPA)	25
4.	CS rekonstrukcija signala sa polinomijalnom i sinusoidalnom faznom modulacijom	29
4.1	Rekonstrukcija CS signala sa sinusoidalnom faznom modulacijom	30
4.2	CS Rekonstrukcija višekomponentnih signala sa nelinearnom faznom modulacijom 35	
5.	Eksperimentalni rezultati	38
5.1	Primjer 1 – Jednokomponentni signal sa sinusoidalnom faznom modulacijom	38
5.2	Primjer 2 – višekomponentni signal sa sinusoidalnom faznom modulacijom	40
5.3	Primjer 3 – CS Rekonstrukcija višekomponentnog signala sa polinomijalnom i kosinusoidalnom faznom modulacijom	46
6.	Zaključak	58
7.	Prilog	59
8.	Literatura	65

Lista Slika

Slika 1: Signal $f(t)=\sin(2\pi 4t)+\sin(2\pi 16t)$ za $t:[0,1]$ sa korakom $1/128$ u vremenskom domenu i rijetka predstava signala u DFT domenu (četiri dominantne komponente)

Slika 2: Slika u prostornom domenu (lijevo) i wavelet transformacija slike (desno) gdje se značajan broj koeficijenata može zanemariti, naročito u višim podopsezima (desno)

Slika 3: a) Sinusoida u vremenskom domenu i DFT-u (jedan pik, ostali koeficijenti su nula); **b)** Zašumljena sinusoida u vremenskom domenu i DFT-u (i pored šuma koji se javlja, pik koji nosi informaciju ispliva tako da ga je pragovanjem moguće detektovati)

Slika 4: Formiranje vektora mjerenja u CS-u

Slika 5: Traženje rješenja minimizacijom l_1 norme

Slika 6: Formiranje vektora mjerenja kada su unaprijed poznate pozicije nenultih koeficijenata originalnog signala

Slika 7: Formiranje vektora mjerenja kada originalni signal ima samo jedan nenulti element

Slika 8: FT domen originalnog signala (lijevo) i njegove rekonstrukcije (desno) upotrebom IPA algoritma

Slika 9: Mikro Doplerov efekat izazvan pokretanjem dijelova tijela targetiranog objekta

Slika 10: Proces primjene CS-a na fazno modulirane signale

Slika 11: Rekonstrukcija signala sa sinusoidalnom faznom modulacijom IPA algoritmom kada se parametri u signalu i funkciji demodulacije ne poklapaju (gore) i kada se parametri poklapaju (dolje)

Slika 12: Maksimalna vrijednost DFT-a rekonstruisanog signala za 15 različitih vrijednosti parametra a

Slika 13: DFT originalnog signala (gore) i rekonstruisanog signala (dolje) kada se parametri ne poklapaju

Slika 14: DFT originalnog signala (gore) i rekonstruisanog signala (dolje) kada se poklapaju parametri prve komponente

Slika 15: DFT originalnog signala (gore) i rekonstruisanog signala (dolje) kada se poklapaju parametri druge komponente

Slika 16: Maksimalna vrijednost DFT-a rekonstruisanog signala za 7 različitih vrijednosti parametra a i 5 različitih vrijednosti parametra b

Slika 17: Originalni signal (plavom bojom), rekonstruisana prva komponenta signala (crvenom bojom) i rekonstruisana druga komponenta signala (zelenom bojom)

Slika 18: DFT originala i rekonstrukcije kosinusne komponente za $N=32$, l1 min algoritam, kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se parametri poklope (desno)

Slika 19: Maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente za $N=32$, l1 min algoritam

Slika 20: DFT originala i rekonstrukcije polinomijalne komponente za $N=32$, l1 min algoritam, kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se parametri poklope (desno)

Slika 21: Maksimum DFT-a rekonstruisane polinomijalne komponente za $N=32$, l1 min algoritam

Slika 22: DFT originala i rekonstrukcije kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se poklapaju (desno) $N=32$, OMP algoritam

Slika 23: Maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente za $N=32$, OMP algoritam

Slika 24: DFT originala i rekonstrukcije kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se poklapaju (desno) polinomijalna komponenta, $N=32$, OMP algoritam

Slika 25: Maksimum DFT-a rekonstruisane polinomijalne komponente $N=32$, OMP algoritam

Slika 26: DFT originala i rekonstrukcije kosinusoidalne komponente kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se poklapaju (desno) $N=32$, IPA algoritam

Slika 27: Maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente $N=32$, IPA algoritam

Slika 28: DFT originala i rekonstrukcije polinomijalne komponente kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se poklapaju (desno) $N=32$, IPA algoritam

Slika 29: Maksimum DFT-a rekonstruisane polinomijalne komponente $N=32$, IPA algoritam

Slika 30: DFT originala i rekonstrukcije kosinusne komponente kada se parametri poklapaju (lijevo), maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente $N=64$, l1 min algoritam

Slika 31: DFT originala i rekonstrukcije kosinusne komponente kada se parametri poklapaju (lijevo), maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente $N=64$, OMP algoritam

Slika 32: DFT rekonstrukcije kada se parametri ne poklapaju a) l1min b) OMP algoritam c) IPA

SAŽETAK

Komprimovano odabiranje signala je aktuelna tehnika odabiranja, prenosa, rekonstrukcije i skladištenja signala koja, u odnosu na konvencionalne tehnike, pruža mogućnost velikog smanjenja potrebnih resursa za smještanje podataka prilikom obrade digitalnih signala. Ova tehnika nudi mogućnost kvalitetne rekonstrukcije signala na osnovu malog broja (mnogo manjeg od dužine signala) , slučajno uzetih linearnih mjerenja. Da bi komprimovano odabiranje bilo moguće, potrebno je da signal zadovoljava uslov rijetkosti – što znači da mora imati mali broj nenultih koeficijenata u nekom od transformacionih domena. Mnogi signali u realnim aplikacijama ne zadovoljavaju ovo svojstvo pa ih je potrebno dodatno modifikovati. Jedni od ovakvih signala su i signali sa nelinearnom faznom modulacijom.

U ovom radu su analizirane performanse različitih algoritama za rekonstrukciju signala sa polinomijalnom i sinusoidalnom faznom modulacijom, primjenom tehnike komprimovanog odabiranja. Kako bi se obezbijedilo svojstvo rijetkosti signala, koje je neophodno za primjenu ove tehnike, signali su najprije podvrgnuti procesu demodulacije nakon čega je vršena rekonstrukcija sa različitim algoritmima i različitim brojem mjerenja. Analizirani su jednokomponentni i višekomponentni signali sa nelinearnim faznim modulacijama kakvi se često srijeću u radarskim signalima.

ABSTRACT

Compressive Sensing of signal is the current technique of selecting, transmission, storage and reconstruction of signals that compared to conventional techniques, offers the possibility of a large reduction in the resources needed for data storage while processing digital signals. This technique offers the possibility of high-quality reconstruction of signal based on a small number (much smaller than the length of the signal) of accidentally taken linear measurements. For Compressive Sensing to be applied, it is necessary that the signal satisfies the requirement of sparsity - which means that it must have a small number of nonzero coefficients in a transformation domain. Many signals in a real application do not comply with this property, so they need to be further modified. Some of these signals are signals with nonlinear phase modulation.

This paper analyzes the performance of different reconstruction algorithms to the signal with polynomial and sinusoidal phase modulation, using Compressive Sensing. To ensure sparsity of signals, which is necessary for the application of this technique, the signals are first subjected to a demodulation process after which have been reconstructed with different algorithms and different number of measurements. We analyzed the one-component and multi-component signals with nonlinear phase modulations such as are often encountered in radar communications

1. Uvod

Komprimovano očitavanje podataka, u literaturi poznato kao Compressive sensing (CS), je nova tehnika obrade signala koja podrazumijeva njihovo komprimovano odabiranje koje, za razliku od konvencionalne tehnike odabiranja, za pravilnu rekonstrukciju signala, ne zahtijeva da se signal odabira sa u skladu sa Nikvistovom teoremom (po kojoj frekvencija odabiranja mora biti veća ili jednaka dvostrukoj vrijednosti maksimalne frekvencije u spektru signala koji se odabira). Ovaj pristup podrazumijeva da se signal može u potpunosti rekonstruisati na osnovu malog broja odbiraka koji su, u ovom slučaju, linearna mjerenja uzeta slučajnim odabiranjem. Da bi ova tehnika mogla da se primijeni neophodno je da budu zadovoljena dva uslova - prvi je da signal ima razrijeđenu (spars) reprezentaciju u nekom transformacionom domenu tj. da ima mali broj koeficijenata različitih od nule, a drugi je da matrica mjerenja mora biti inkoherentna sa baznom matricom transformacionog domena u kojem signal ima mali broj nenultih koeficijenata. Eksperimentalni rezultati su pokazali da se drugi uslov može zadovoljiti ukoliko se za matricu mjerenja uzme slučajna matrica, i pri tome se najčešće koristi slučajna parcijalna matrica Fourierovih baznih funkcija dobijena kao slučajan skup kolona potpune Fourierove matrice. Rekonstrukcija signala u ovim uslovima zasniva se na kompleksnom matematičkom problemu rješavanja neodređenog sistema jednačina (s obzirom na to da na osnovu veoma malog broja odbiraka M tj. mjerenja rekonstruišemo signal čije su dimenzije znatno veće, $N \gg M$). Za rješavanje ovog problema koriste se kompleksni, optimizacioni algoritmi od kojih značajan broj datira i prije pojave same oblasti komprimovanog očitavanja podataka. Rekonstrukcija signala se zapravo svodi na pronalaženje pozicija i vrijednosti nenultih koeficijenata originalnog signala (što je signal više rijedak, manje koeficijenata je potrebno rekonstruisati).

Algoritmi za CS rekonstrukciju nastoje da pronađu tačno rješenje (od beskonačno mnogo potencijalnih rješenja) i pri tome moraju biti računski izvodljivi. Iako postoji veliki broj ovih algoritama, i dalje se ulažu značajni istraživački napor i kako bi se pronašli novi i modifikovali postojeći algoritmi u cilju poboljšanja vremena izvršavanja i performansi. Ovi algoritmi se mogu podijeliti u nekoliko grupa: algoritmi zasnovani na konveksnim optimizacijama, zatim iterativni *greedy* algoritmi među kojima su najznačajniji algoritmi zasnovani na ortogonalnom podudaranju (*orthogonal matching pursuit*), i algoritmi koji primjenjuju pragovanje u svakoj iteraciji.

Signali sa polinomijalnim i sinusoidalnim faznim modulacijama se često srijeću u realnim aplikacijama, u prvom redu u radarskim aplikacijama i komunikacionim sistemima. Ovakvi signali otežavaju primjenu CS-a s obzirom na to da nemaju rijetku predstavu u najčešće korišćenim transformacionim domenima kao što su domen Fourierove transformacije, kosinusne/sinusne transformacije, wavelet transformacije i slično. Stoga je jedan od glavnih izazova koji se javlja pri radu sa ovim signalima u uslovima komprimovanog očitavanja obezbjeđivanje osobine rijetkosti. Iz tog razloga su značajni doprinosi i poseban dio ovog magistarskog rada posvećeni analizi pomenutih signala, zatim tehnikama njihove transformacije/demodulacije, te obezbjeđivanja svojstva rijetkosti signala kako bi primjena CS-a bila omogućena. Ono što je veći izazov, iz razloga što dodatno otežava rekonstrukciju signala sa nestacionarnom trenutnom frekvencijom u slučajevima kakvi su razmatrani u ovom magistarskom radu, je šum koji je posljedica malog broja mjerenja, odnosno odabiranja signala sa mnogo manjim brojem odbiraka nego što to zahtijeva konvencionalna teorema o odabiranju. Na kraju, ali ne i manje značajan faktor koji utiče na mogućnost rekonstrukcije signala je i broj komponenti signala, priroda komponenti (da li su komponente sa istom ili različitom faznom modulacijom), te amplituda tih komponenti. U magistarskom radu su analizirani i ovi faktori koji utiču na kvalitet i uopšte mogućnost rekonstrukcije signala. Kvalitet rekonstrukcije signala zavisi i od tipa algoritma koji se primjenjuje, te je u magistarskom radu analizirana upotreba različitih algoritama za rekonstrukciju, u pogledu performansi, zahtijevanog broja mjerenja, kao i u pogledu kompleksnosti i prirode signala koji se rekonstruiše.

2. Compressive Sensing

Compressive sensing je tehnika komprimovanog odabiranja signala u cilju njegovog lakšeg i bržeg prenosa, obrade i rekonstrukcije. Ova tehnika je naišla na primjenu i postala značajan predmet istraživanja u oblasti inženjerstva, kompjuterskih nauka i primijenjene matematike zato što prevazilazi ograničenja koja nameće konvencionalna tehnika odabiranja signala. Kao što je poznato iz Shannon-Nyquist teoreme o odabiranju, signal se može u potpunosti rekonstruisati na osnovu seta ravnomjerno raspoređenih odbiraka pri čemu frekvencija odabiranja mora biti veća ili jednaka dvostrukoj vrijednosti maksimalne frekvencije u spektru signala koji se odabira.

Razvoj tehnologije ima za posljedicu da sve više korisnika generiše, skladišti i šalje digitalne informacije pa analize pokazuju da je eksponencijalni rast stvaranja novih informacija prevazišao količinu dostupnih smještajnih kapaciteta za njihovo skladištenje. Kod signala koji se odlikuju visoko-frekvencijskim sadržajem, koji se često srijeću u realnim situacijama, ovo znači da je potreban veliki broj odbiraka koji se dalje moraju obrađivati (komprimovati prije samog prenosa). Zbog toga je od značajnog interesa razvoj tehnika koje mogu na efikasan način da smanje potreban broj mjerenja, a time i potrebne kapacitete za snimanje, smještanje i prenos podataka. CS donosi mogućnost rekonstrukcije signala na osnovu onoga što se ranije smatralo nepotpunom informacijom tj. na osnovu linearnih mjerenja čiji je broj značajno manji od dužine signala u tradicionalnim sistemima odabiranja i mjerenja signala.

Za primjenu CS-a je neophodno zadovoljiti dva uslova:

- **Svojstvo rijetkosti signala (u literaturi poznato i kao spars svojstvo)** – označava svojstvo da signal mora imati mali broj nenultih koeficijenta u odgovarajućem domenu, dok su ostali koeficijenti jednaki nuli. Ukoliko značajan broj koeficijenata nije nula, ali su dovoljno mali da se mogu zanemariti tj. aproksimirati sa nulama, signal se takođe može smatrati dovoljno rijetkim signalom. Signali od interesa nisu rijetki u

vremenskom/prostornom domenu pa ih je stoga najprije potrebno predstaviti u nekom od odgovarajućih transformacionih domena.

- **Restricted Isometry Property (RIP)** – označava svojstvo da matrica mjerenja i bazna matrica transformacionog domena u kojem se uzimaju mjerenja moraju biti inkohherentne kako bi se očuvala informacija o signalu.

2.1 Sparsiti i transformacioni domeni

Kao što je već rečeno, signali se mogu dobro aproksimirati linearnom kombinacijom nekoliko elemenata unaprijed određene baze. Konačni signali se predstavljaju kao vektori u n -dimenzionom Euklidskom prostoru R^n , čime se signal sa velikim brojem koeficijenata svodi na signal sa malim brojem značajnih koeficijenata koji nose potrebnu informaciju (*low dimension* modelovanje signala), a to obezbjeđuje svojstvo rijetkosti signala.

Ukoliko vektori skupa $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ obrazuju prostor R^n i linearno su nezavisni, onda oni predstavljaju bazne vektore toga prostora i svi ostali vektori ovog prostora se mogu predstaviti kao linearna kombinacija ovih vektora. Ovo znači da za signal $x \in R^n$ postoje jedinstveni koeficijenti $\{c_i\}_{i=1}^n$ takvi da važi:

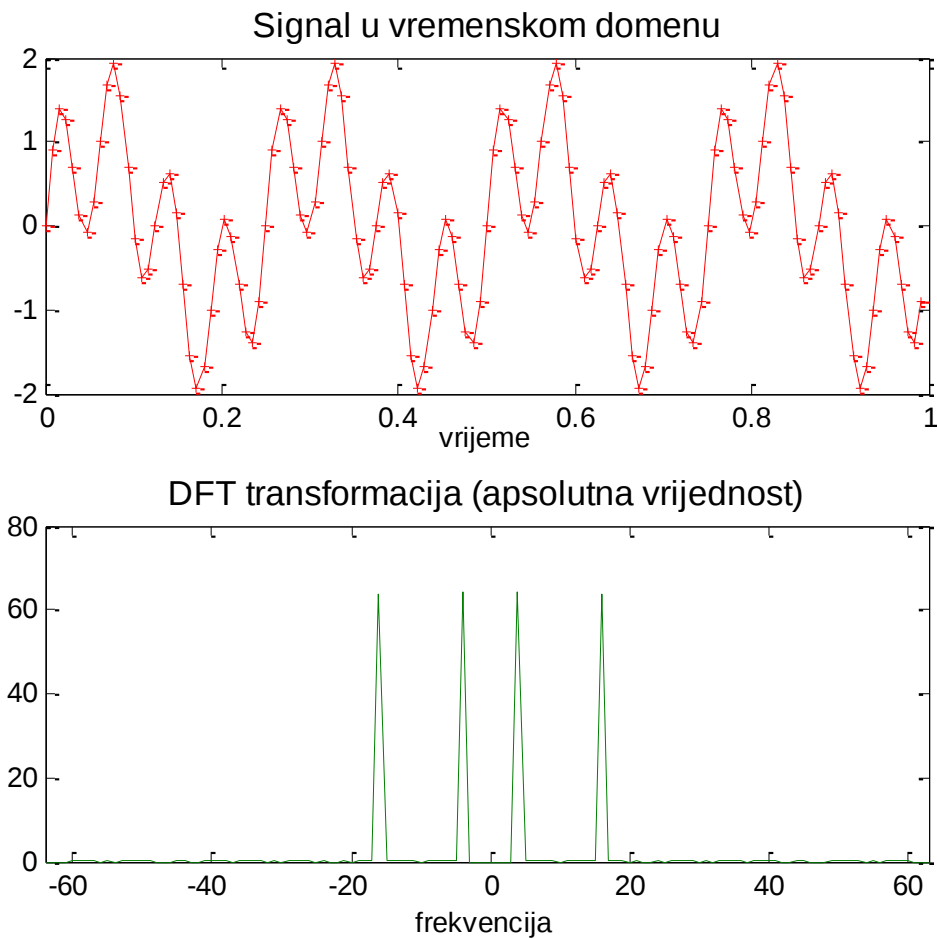
$$x = \sum_{i=1}^n \psi_i c_i. \quad (1)$$

Ukoliko je matrica $\psi \in R^{M \times N}$, a ψ_i njena kolona i vektor $c \in R^{1 \times N}$ čiji su elementi c_i onda (1) možemo pisati:

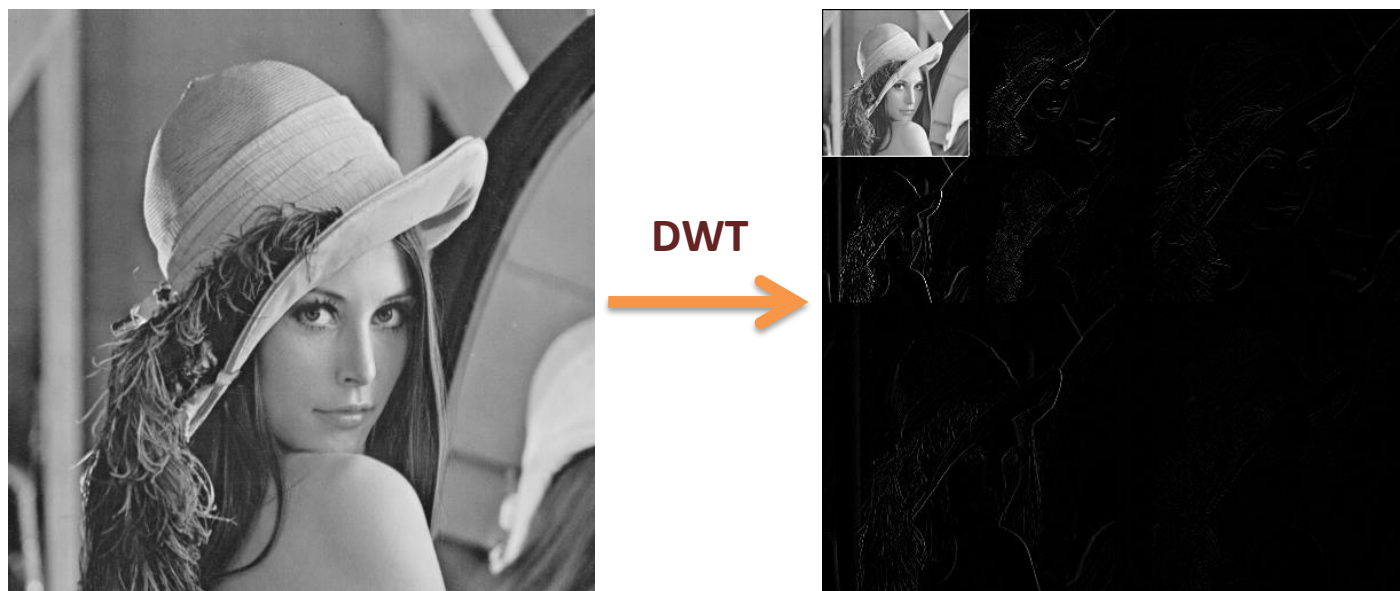
$$x = \psi c. \quad (2)$$

Na Slikama 1 i 2 su dati primjeri signala u vremenskom/prostornom domenu koji im je svojstven i odgovarajući prikaz u transformacionim domenima gdje se vidi da je informacija

koju signal nosi zapravo sadržana u malom broju koeficijenata tj. da u tim domenima imaju rijetku reprezentaciju.



Slika 1: Signal $f(t) = \sin(2\pi 4t) + \sin(2\pi 16t)$ za $t: [0, 1]$ sa korakom $1/128$ u vremenskom domenu i rijetka predstava signala u DFT domenu (četiri dominantne komponente)



Slika 2: Slika u prostornom domenu (lijevo) i wavelet transformacija slike (desno) gdje se značajan broj koeficijenata može zanemariti, naročito u višim podopsezima (desno)

U zavisnosti od prirode signala potrebno je naći odgovarajući transformacioni domen u kojem je signal rijedak, odnosno odgovarajuću bazu u kojoj će biti predstavljen. Najpoznatije transformacije su: Diskretna Furijeova transformacija (DFT), Diskretna kosinusna transformacija (DCT), Diskretna wavelet transformacija (DWT), Diskretna sinusna transformacija (DST) i sl. Obzirom na prirodu signala sa nelinearnom faznom modulacijom, koji su u fokusu istraživanja ovog rada, DFT se pokazuje kao pogodna transformacija pa će biti dat kratak osvrt na nju.

2.1.1 Diskretna Furijeova transformacija

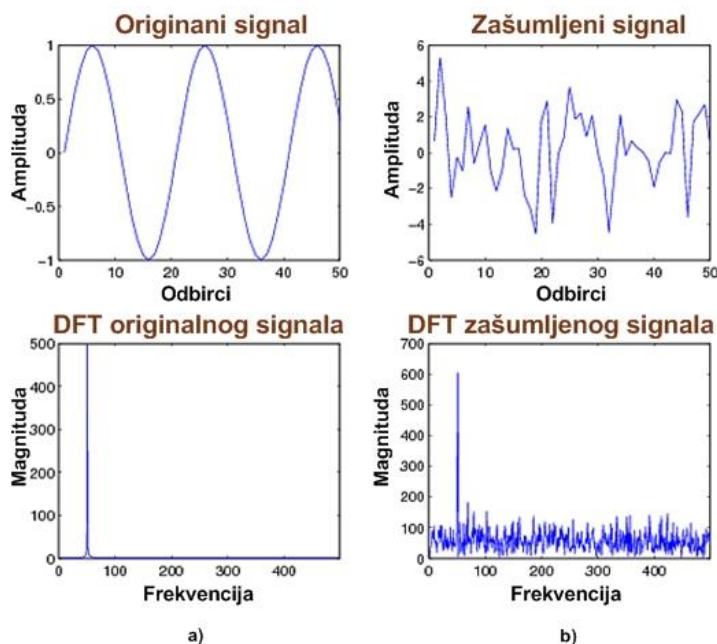
Diskretna Furijeova transformacija je zasnovana na skupu eksponencijalnih baznih funkcija (kompleksnih sinusoida). Zbog postojanja veoma efikasnih algoritama za njeno izračunavanje našla je veliku primjenu u obradi i spektralnoj analizi digitalnih signala. Diskretna Furijeova transformacija transformiše sekvencu (u našem slučaju signal) $x[n]$, dužine L u sekvencu odbiraka u spektralnom domenu $X[k]$ dužine $N > L$:

$$X[k] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3)$$

Za rekonstrukciju signala odnosno sekvence $x[n]$ na osnovu Furijeovih odbiraka korsiti se Inverzna Diskretna Furijeova Transformacija (IDFT):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \quad ; n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

Na Slici 3 je ilustrovano kako nam DFT pomaže da izvučemo one djelove signala koji nose korisnu informaciju (što znači da ostale koeficijente možemo zanemariti i signal je rijedak) čak i u uslovima kada je signal zahvaćen šumom.



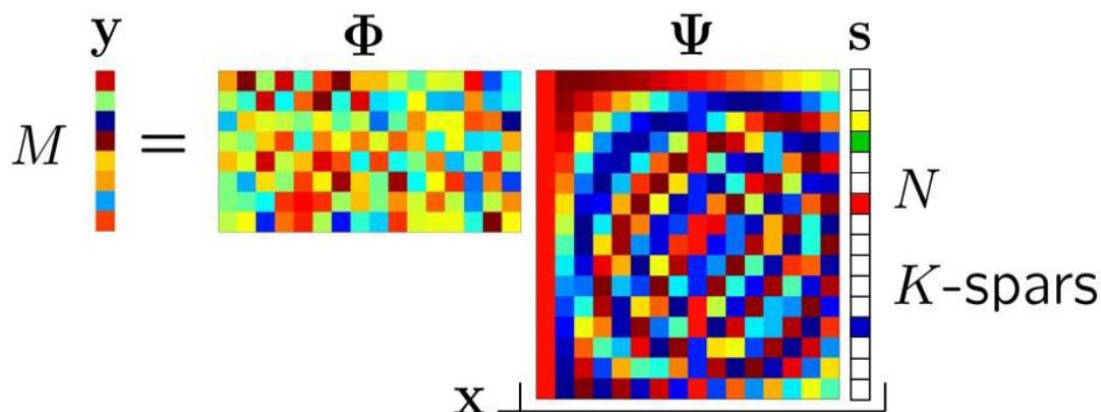
Slika 3: **a)** Sinusoida u vremenskom domenu i DFT-u (jedan pik, ostali koeficijenti su nula); **b)** Zašumljena sinusoida u vremenskom domenu i DFT-u (i pored šuma koji se javlja, pik koji nosi informaciju ispliva tako da ga je pragovanjem moguće detektovati)

2.2 Restricted isometry property (RIP) i mjerenja u CS-u

RIP svojstvo je usko vezano za matrice mjerenja i transformacionog domena. Stoga ćemo prije definisanja ovog važnog svojstva za primjenu CS-a opisati ulogu ovih matrica u procesu uzimanja mjerenja u Compressive sensing-u.

2.2.1 Mjerenja u Compressive Sensingu

Tehnikom CS-a odbirke signala (koji su bili osnov za rekonstrukciju signala primjenom konvencionalnih metoda) zamjenjujemo sa linearnim, ne-adaptivnim slučajnim mjerenjima (Slika 4).



Slika 4: Formiranje vektora mjerenja u CS-u

Signal $x \in R^n$ je K spars ako ima K koeficijenata različitih od nule, a sve ostale koeficijente nula ili toliko male da ih možemo zanemariti i aproksimirati nulom. Kao što je već rečeno, originalni signal x je najprije predstavljen koeficijentima u odgovarajućem transformacionom domenu kako bi se obezbijedilo svojstvo rijetkosti signala (na slici su bijelom bojom označeni nulti koeficijenti vektora s kojih je značajno više u odnosu na nenulte koeficijente, označene bojom u istom vektoru) :

$$x = \Psi s, \quad (5)$$

gdje je $\Psi \in R^{n \times n}$ bazna matrica odgovarajućeg transformacionog domena, a s je K -spars reprezentacija signala. Množenjem ovakvog signala sa matricom mjerenja $\Phi \in R^{m \times n}$ dobija se vektor mjerenja $y \in R^m$ čije su dimenzije mnogo manje od dimenzija signala ($n \gg m$). Matrica mjerenja je odabrana tako da izdvaja mjerenja slučajnim postupkom, pa se od n raspoloživih koeficijenata uzima samo m slučajno odabranih na osnovu kojih se vrši rekonstrukcija :

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s. \quad (6)$$

Jednačina (6) se može zapisati i:

$$y = \Theta s. \quad (7)$$

Matrica Θ se u literaturi naziva compressive sensing matrica.

2.2.2 Matrica mjerenja i Restricted isometry property (RIP)

Odabir matrice mjerenja je ključan za primjenu tehnike CS-a zato što se mora voditi računa da matrica bude konstruisana tako da se njenom primjenom očuvaju korisne informacije signala. Obzirom na to da matrica mjerenja nije kvadratna matrica već je dimenzija $m \times n$, pri čemu je $m < n$, obezbijeđeno je uzimanje manjeg broja koeficijenata. Sa druge strane ovo znači da imamo i manje jednačina nego nepoznatih, na osnovu kojih je potrebno rekonstruisati originalni signal. Međutim, kada je signal dovoljno rijedak i kada su poznate pozicije nenultih koeficijenata a priori, ovakav sistem postaje rješiv. Da bi ovakav sistem bio rješiv dovoljan je uslov da za bilo koji K -spars vektor a i matricu Q važi:

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\|Qa\|_2^2}{\|a\|_2^2} \leq 1 + \varepsilon, \quad (8)$$

za neko $\varepsilon > 0$, što zapravo znači da je neophodno da matrica Θ mora da očuva dužinu ovih vektora sa rijetkom reprezentacijom. Obzirom na to da pozicije nenultih koeficijenata neće biti unaprijed poznate, dokazano je da je i bez ove informacije, za uspješnu rekonstrukciju dovoljno

da matrica mjerenja zadovoljava svojstvo (8) , odnosno da za svaki cijeli broj $k = 1, 2, \dots$ postoji izometrijska konstanta $\delta_k \geq 0$ matrice Φ kao najmanji broj koji zadovoljava nejednačinu (9) za sve k -spars vektore x :

$$1 - \delta_k \leq \frac{\|\Phi x\|_2^2}{\|x\|_2^2} \leq 1 + \delta_k \quad (9)$$

Ukoliko δ_k nije probližno 1, za matricu Φ kažemo da zadovoljava RIP (*Restricted isometry property*) reda k .

Slučajne matrice zadovoljavaju RIP velikog reda, te se upravo one i koriste kao matrice mjerenja tokom primjene tehnike CS-a.

Još jedno značajno svojstvo koje obezbjeđuje CS rekonstrukciju signala je visok stepen inkoherencije između matrica mjerenja i bazne matrice transformacionog domena. Koherenciju između ovih matrica definišemo kao mjeru korelacije između njihovih elemenata:

$$\eta(\Phi, \Psi) \triangleq \sqrt{n} \max_{1 \leq j, k \leq n} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|. \quad (10)$$

Za ortonormalne matrice Φ i Ψ koherencija je:

$$1 \leq \eta(\Phi, \Psi) \leq \sqrt{n}. \quad (11)$$

Mala koherencija (tj. inkoherencija) znači da vektori matrice Φ ne mogu biti spars reprezentacija vektora bazne matrice i obratno.

3. COMPRESSIVE SENSING ALGORITMI ZA REKONSTRUKCIJU

3.1 Problem Compressive sensing-a

Problem koji nameće tehnika komprimovanog odabiranja signala jeste – kako rekonstruisati kompletan signal na osnovu jako malog broja odbiraka odnosno, matematički rečeno, kako riješiti neodređen sistem jednačina koji ima više nepoznatih nego jednačina. Ovaj problem je poznat u nauci još i prije nego što se započelo sa primjenom tehnike CS-a kao **optimizacioni problem**.

Optimizacioni problem je predstavljen oblikom:

$$\begin{aligned} & \min f_0(x) \\ & \text{pri čemu je: } f_i(x) \leq c_i, \quad i=1\dots m \end{aligned} \quad (12)$$

Vektor $x \in R^n$ se naziva **optimizacionom varijablom** problema, a u slučaju primjene CS-a predstavlja digitalni signal, funkcija $f_0 : R^n \rightarrow R$ je objektivna funkcija, funkcije $f_i : R^n \rightarrow R, \quad i=1\dots m$ su funkcije ograničenja dok su konstante $c_1, \dots, c_m$ granice ograničenja.

Rješenje ovog problema jeste vektor $\hat{x}$ takav da ima najmanju apsolutnu vrijednost od svih vektora koji, za bilo koje z takvo da važi $f_1(z) \leq c_1, \dots, f_m(z) \leq c_m$ zadovoljavaju nejednačinu:

$$f_0(z) \geq f_0(\hat{x}). \quad (13)$$

Postoji više familija (klasa) optimizacionih problema. Oni koji su nama od interesa u CS-u su tzv. **konveksni optimizacioni problemi**, čije su objektivna i funkcije ograničenja konveksne što znači da zadovoljavaju nejednačinu:

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y), \quad (14)$$

za svako $x, y \in R^n$ i $\alpha, \beta \in R$ pri čemu važi: $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Optimizacioni problem zapravo predstavlja problem odabira najboljeg (optimalnog) rješenja vektora iz skupa potencijalnih rješenja koja zadovoljavaju neke unaprijed postavljene uslove. Varijabla x predstavlja odabrano rješenje, funkcije ograničenja predstavljaju uslove koji ograničavaju broj mogućih rješenja dok objektivnu funkciju možemo smatrati cijenom odabira. Optimalno rješenje je ono rješenje koje ima najmanju cijenu od svih potencijalnih rješenja iz skupa vektora koji zadovoljavaju unaprijed postavljene uslove (ograničenja). Optimizacioni algoritmi kojima se izračunava rješenje ovakvih problema se i dalje razvijaju i unapređuju i njihova uspješnost zavisi od mnogo faktora (ograničenja, broja varijabli, specijalne strukture vektora – kao što je sparsiti u CS-u itd.). Čak i kod naizgled jednostavnijih optimizacionih problema, izračunavanje optimalnog rješenja može da traje jako dugo, a u nekim slučajevima ne postoji garancija da će algoritam pronaći optimalno rješenje. U nastavku rada je dat osvrt na tri često korišćena algoritma za pronalaženje optimalnog rješenja, što u kontekstu CS-a predstavlja zapravo rekonstruisan signal.

3.2 L_1 minimizacioni algoritam

Kako se u osnovi ovog algoritma nalazi minimizacija L_1 norme najprije će biti kratko riječi o samom pojmu norme vektora.

3.2.1 Norma vektora

Norma vektora je jedan od ključnih pojmova linearne algebre i zapravo predstavlja veličinu vektora. Ova veličina se može mjeriti na više različitih načina, te stoga postoji i više normi vektora. Posmatrajmo vektor:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \quad ; \quad a_i \in R, i = 1, \dots, n \quad (15)$$

Ukoliko posmatramo kompleksan vektorski prostor V , norma je funkcija $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstva:

- $f(a) \geq 0$, za svako $a \in V$
- $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$, za svako $a, b \in V$ (nejednakost trougla)
- $f(\lambda a) = |\lambda| f(a)$, za svako $\lambda \in \mathbb{C}$ i $a \in V$ (pozitivna homogenost)
- $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

L_0 norma

L_0 norma je zapravo broj nenultih koeficijenata vektora:

$$\|a\|_0 = \sqrt[0]{\sum_i x_i^0}. \quad (16)$$

L_1 norma (srednja norma)

L_1 norma vektora, se definiše kao suma apsolutnih vrijednosti njegovih komponenti:

$$\|\vec{a}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (17)$$

L_2 norma (norma najmanjih kvadrata)

L_2 norma vektora se definiše kao kvadratni korijen sume kvadrata apsolutnih vrijednosti njegovih komponenti:

$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}. \quad (18)$$

L_∞ norma (uniformna norma)

L_∞ norma vektora se definiše kao maksimum apsolutnih vrijednosti njegovih komponenti:

$$\|\vec{a}\|_\infty = \max \{ |a_i| : i = 1, \dots, n \}. \quad (19)$$

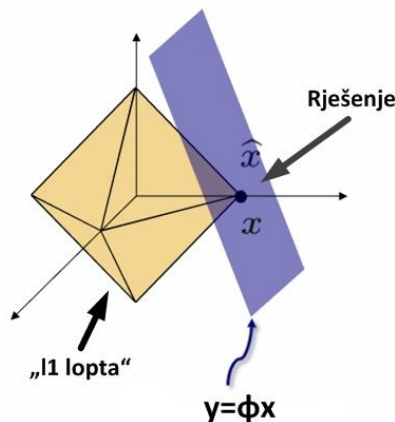
Kada je u pitanju rješavanje neodređenog sistema jednačina (6) pri čemu je x spars, minimizacija L_2 norme nije zahtjevana za računanje, ali često dolazi do pogrešnog rješenja – po definiciji, veličini ove norme će značajno doprinijeti i elementi čija vrijednost nije toliko velika da ih ne možemo zanemariti. L_0 norma će rezultirati tačnim rješenjem, ali je ona previše računski zahtjevana. Kao kompromis, za rješavanje ovog problema koristi se minimizacija L_1 norme.

3.2.2 Minimizacija L_1 norme

Minimizacija L_1 norme pronalazi onaj vektor koji ima najmanju L_1 normu od svih vektora koji pripadaju vektor-prostoru definisanom mjerenjima:

$$\min \|x\|_1, \quad \text{pri čemu važi : } y = \Phi x \quad (20)$$

Rješenje je zapravo presjek između prostora vektora koji imaju istu L_1 normu (definisanog tzv. “ L_1 loptom”) i prostora definisanog mjerenjima (Slika 5):



Slika 5: Traženje rješenja minimizacijom L_1 norme

Ukoliko je obezbijeđeno svojstvo rijetkosti originalnog signala, ovaj algoritam će naći optimalno rješenje.

Ovaj problem pripada klasi linearnih programa (LP), za čije se izračunavanje koristi *primal-dual* metod koji će biti opisan u nastavku.

Standardna forma linearnog programa je:

$$\min_z \langle c_0, z \rangle, \quad \text{gdje je: } A_0 z = b, \quad f_i(z) \leq 0 \quad (21)$$

$z \in R^N$, $b \in R^K$, $A_0 \in R^{K \times N}$, a sve f_i , $i = 1, \dots, m$ su linearne funkcije:

$$f_i(z) = \langle c_i, z \rangle + d_i \quad (22)$$

$c_i \in R^N$, $d \in R$. Kada algoritam dođe do optimalne tačke z^* , postojaće dualni vektori $v^* \in R^K$, $\lambda^* \in R^m$, $\lambda^* \geq 0$ takvi da zadovoljavaju Karuš-Kun-Takerove (*Karush-Kuhn-Tucker, KKT*) uslove:

$$\begin{aligned} c_0 + A_0^T v^* + \sum_i \lambda_i^* c_i &= 0, \\ \lambda_i^* f_i(z^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ A_0 z^* &= b, \\ f_i(z^*) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (23)$$

Što znači da *primal-dual* metodom algoritam pronalazi optimalno rješenje z^* , kao i optimalne dualne vektore v^* i λ^* rješavajući ovaj sistem nelinearnih jednačina. Pronalaženje rješenja se oslanja na Njutnov metod: u tački (z^k, v^k, λ^k) pri čemu je $f_i(z^k) < 0$, $\lambda^k > 0$ sistem je riješen, ali korak (*step*) do sljedeće tačke $(z^{k+1}, v^{k+1}, \lambda^{k+1})$ mora biti modifikovan tako da vodi do rješenja, što se postiže promjenom parametra τ :

$$\lambda_i^k f_i(z^k) = -1 / \tau^k \quad (24)$$

Povećavanjem parametra τ^k algoritam se kreće kroz Njutnove iteracije tražeći sve tačke koje formiraju vektor-rješenje.

Primalni, dualni i centralni rezidual kvantifikuju koliko je tačka (z, v, λ) blizu da zadovolji KKT kriterijume (24):

$$\begin{aligned} r_{dual} &= c_0 + A_0^T v + \sum_i \lambda_i c_i \\ r_{cent} &= -\Lambda f - (1/\tau) \\ r_{pri} &= A_0 z - b \end{aligned} \quad (25)$$

gdje je Λ dijagonalna matrica takva da važi: $(\Lambda)_{ii} = \lambda_i$ a funkcija $f = (f_1(z) \dots f_m(z))^T$.

Cilj je krenuti od tačke (z, v, λ) i naći korak $(\Delta z, \Delta v, \Delta \lambda)$ takav da važi:

$$r_\tau(z + \Delta z, v + \Delta v, \lambda + \Delta \lambda) = 0 \quad (26)$$

Kada se (27) linearizuje Tejlorovom ekspanzijom oko tačke (z, v, λ) dobija se:

$$r_\tau(z + \Delta z, v + \Delta v, \lambda + \Delta \lambda) \approx r_\tau(z, v, \lambda) + J_{r_\tau}(z, v, \lambda) \begin{pmatrix} \Delta z \\ \Delta v \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} \quad (27)$$

gdje je $J_{r_\tau}(z, v, \lambda)$ Jakobijan od r_τ pa se dobija sistem:

$$\begin{pmatrix} 0 & A_0^T & C^T \\ -\Lambda C & 0 & -F \\ A_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z \\ \Delta v \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_0 + A_0^T v + \sum_i \lambda_i c_i \\ -\Lambda f - (1/\tau) \\ A_0 z - b \end{pmatrix} \quad (28)$$

gdje je $C_{m \times N}$ matrica čije su vrste c_i^T , a F je dijagonalna matrica takva da važi $(F)_{ii} = f_i(z)$.

Rješavanjem sistema se dobija $(\Delta z, \Delta v, \Delta \lambda)$ čime je određen smjer narednog koraka u iteraciji a njegova dužina $0 < s \leq 1$ se određuje tako da zadovoljava uslove:

1. $f_i(z + s\Delta z) < 0$; $\lambda_i > 0$; za svaku i

2. Norma reziduala mora dovoljno opasti:

$$\|r_r(z + s\Delta z, v + s\Delta v, \lambda + s\Delta\lambda)\|_2 \leq (1 - \alpha s) \cdot \|r_r(z, v, \lambda)\|_2$$

pri čemu je $\alpha = 0.01$

Kada su dualni i primarni reziduali mali, parametar $\eta = -f^T \lambda$ predstavlja zapravo mjeru kojom se aproksimira koliko je tačka blizu optimalnom rješenju. Ovaj parametar je ujedno i kriterijum zaustavljanja algoritma (Njutnove iteracije će se ponavljati sve dok η ne padne ispod zadatog praga).

3.2.3 Varijante algoritma – minimizacija L_1 norme

Postoje varijacije algoritma minimizacija L_1 norme koje se razlikuju samo po načinu računanja Njutnove iteracije. U nastavku su nabrojane neke od njih:

Minimizacija L_1 norme sa aproksimacijom greške

Ako je $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, a $y \in \mathbb{R}^M$, minimizacija L_1 norme sa aproksimacijom greške se svodi na:

$$\min_x \|y - Ax\|_1 \quad (29)$$

Rješenje ovog problema je onaj vektor $x \in \mathbb{R}^N$ takav da greška $y - Ax$ ima minimalnu L_1 normu.

Ovaj algoritam je naišao na veliku primjenu u kodiranju poruka. Pretpostavimo da koder kreira ključnu riječ $c = Ax$ za poruku x . Pri prenosu kroz kanal, javlja se greška na nepoznatom broju djelova poruke. Dekoder na prijemnoj strani prima poruku sa greškom: $y = c + e$ gdje je e greška. Ukoliko je e dovoljno rijedak signal, dekodeer može upotrebom ovog algoritma rekonstruisati poruku x u potpunosti.

Minimizacija L_1 norme sa kvadratnim ograničenjem

Postavka ovog problema se može definisati na sljedeći način – potrebno je pronaći vektor x takav da min l_1 norma toga vektora zadovoljava uslov:

$$\min_x \|Ax - b\|_2 \leq \xi \quad (30)$$

gdje je ξ parametar koji zadaje korisnik proizvoljno.

Ukoliko postoji dovoljno rijedak signal x_0 takav da je $b = Ax_0 + e$ za neku malu grešku $\|e\|_2 \leq \xi$ onda će rješenje x_2^* koje pronađe ovaj algoritam biti blisko sa x_0 . Odnosno, za neku malu konstantu C važiće:

$$\|x_2^* - x_0\|_2 \leq C\xi \quad (31)$$

Minimizacija L_1 norme sa korelacijom reziduala (*Dantzig Selector*)

Postavka ovog problema se definiše kao:

$$\min \|x\|_1, \quad \text{pri čemu je } \|A^*(Ax - b)\|_\infty \leq \gamma \quad (32)$$

gdje je parametar γ zadat od strane korisnika.

Ovaj algoritam zahtijeva da ostatak (rezidual), $Ax - b$, vektora koji predstavlja rješenje nema preveliku korelaciju sa bilo kojom kolonom matrice A te stoga proizvod $A^*(Ax - b)$ predstavlja zapravo mjeru korelacije.

3.3 Algoritam sa metodom pretraživanja na osnovu ortogonalnog podudaranja (*Ortogonal Matching Pursuit - OMP*)

3.3.1 Metod pretraživanja na osnovu podudaranja (*Matching Pursuit*)

Algoritmi koji koriste metod pretraživanja na osnovu podudaranja, zapravo razlažu signal na linearne ekspanzije funkcija koje zatim formiraju rječnik. U svakoj iteraciji ovi algoritmi biraju iz rječnika onaj član koji najbolje aproksimira traženo rješenje. U svakoj iteraciji se bira onaj član rječnika koji ima najveću korelaciju sa ostatkom (rezidualom) bez obzira na prethodne/buduće odabire.

Ukoliko je H Hilbertov prostor, a $D = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ rječnik sačinjen od skupa vektora takvih da važi $\|g_\gamma\|_1 = 1$. Za svako $f \in H$, linearna ekspanzija ove funkcije se definiše rječnikom D korišćenjem sukcesivne aproksimacije. Naime, svaki vektor $g \in D$ možemo razložiti korišćenjem funkcija f :

$$f = \langle f, g \rangle g + r^{(g)}. \quad (33)$$

gdje $r^{(g)}$ predstavlja ostatak nakon aproksimacije funkcije f vektorom g . Pošto su ostatak i funkcija ortogonalni važi:

$$\|f\|^2 = |\langle f, g \rangle|^2 + \|r^{(g)}\|^2. \quad (34)$$

Da bi aproksimacija bila što bliža rješenju potrebno je da norma ostatka bude što manja, odnosno da $|\langle f, g \rangle|^2$ bude maksimalno.

U svakoj iteraciji algoritma, iz rječnika se bira najbolja aproksimacija za trenutni ostatak. Ako pretpostavimo da imamo n iteracija – te stoga i ostatak n -tog reda $r^{(n)}$, biramo funkciju $g^{(n+1)}$ iz rječnika tako da se $r^{(n)}$ razlaže na sljedeći način:

$$r^{(n)} = \langle r^{(n)}, g^{(n)} \rangle g^{(n)} + r^{(n+1)}. \quad (35)$$

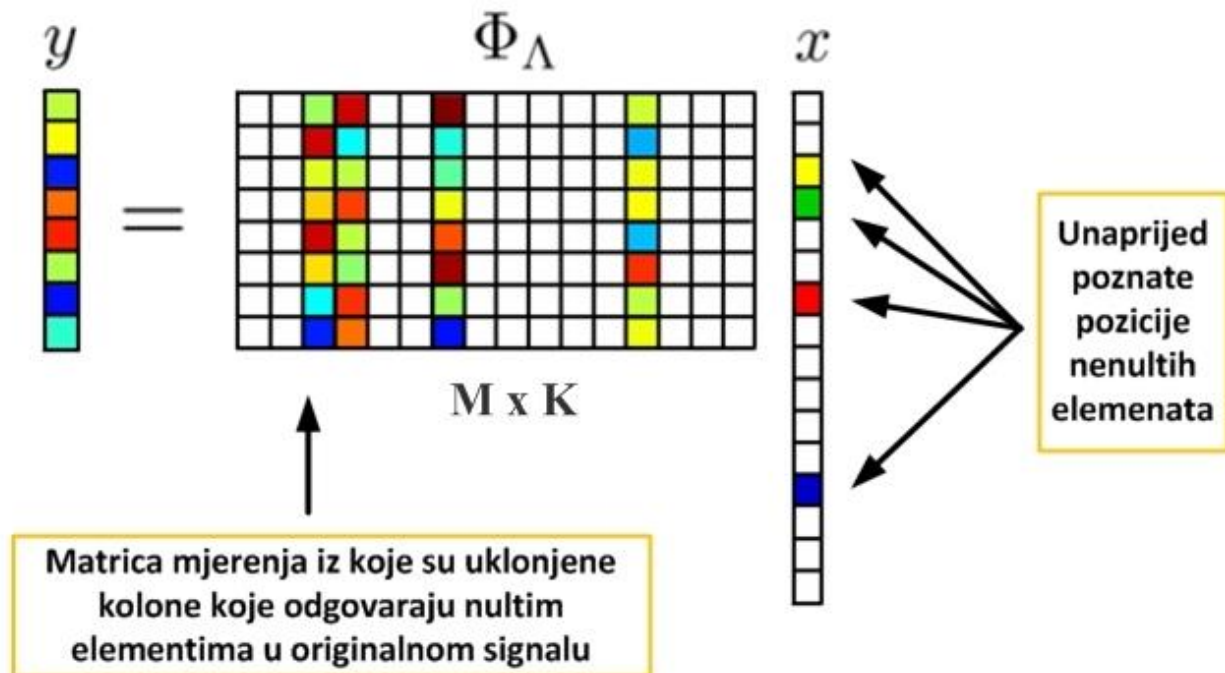
pa se dekompozicija originalne funkcije f svodi na:

$$f = \sum_{i=0}^n \langle r^{(i)}, g^{(i)} \rangle g^{(i)} + r^{(n+1)}. \quad (36)$$

Posmatrajmo primjenu opisane tehnike na Compressive Sensing. Ono što bi problem CS-a svelo na jednostavno rješavanje sistema jednačina jeste poznavanje tačnih pozicija nenultih koeficijenata u signalu x prije same rekonstrukcije. Naime, ako bismo unaprijed znali pozicije nenultih koeficijenata Λ :

$$\Lambda = \text{supp}(x), \quad (37)$$

mogli bismo da zanemarimo značajan broj kolona u matrici mjerenja pa bi se rekonstrukcija originalnog signala svela na jednostavno rješavanje sistema jednačina (Slika 6):



Slika 6: Formiranje vektora mjerenja kada su unaprijed poznate pozicije nenultih koeficijenata originalnog signala

Gdje je Φ_{Λ} matrica mjerenja koja sadrži samo kolone koje odgovaraju nenultim elementima u originalnom signalu (na pozicijama Λ).

Lako se pokazuje da se u ovom slučaju pronalaženje rješenja svodi na:

$$\begin{aligned}\Phi_{\Lambda}^T y &= (\Phi_{\Lambda}^T \Phi_{\Lambda})^{-1} \Phi_{\Lambda}^T y \\ &= (\Phi_{\Lambda}^T \Phi_{\Lambda})^{-1} \Phi_{\Lambda}^T \Phi_{\Lambda} x \\ &= x\end{aligned}$$

Naravno, nije moguće unaprijed znati pozicije nenulatih elemenata originalnog signala pa je ključna ideja ovih, tzv. “pohlepnih” algoritama pronaći ove pozicije iterativnim postupkom na osnovu poznatih podataka.

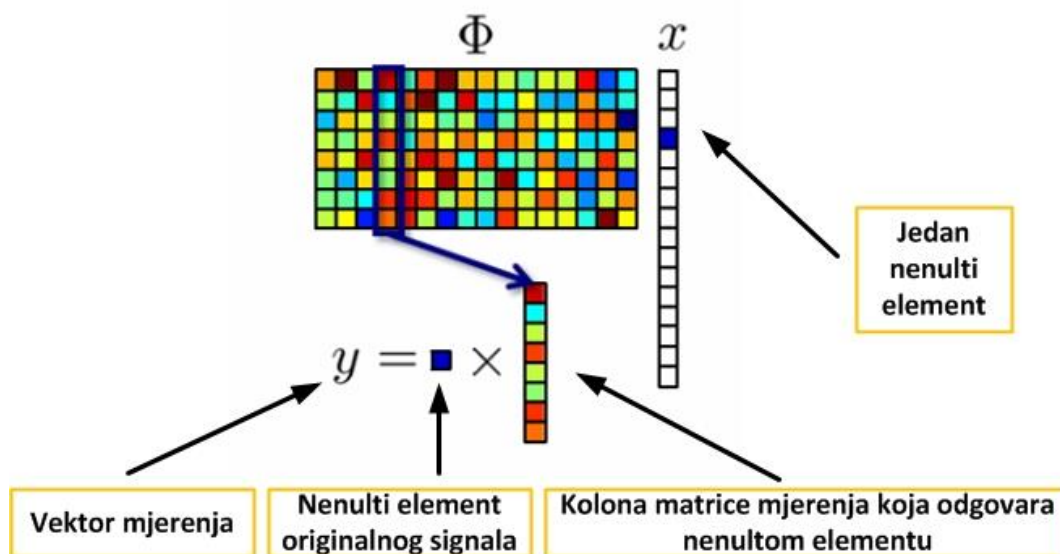
Kako je riječ o iterativnom postupku znači da se pozicije pronalaze jedna po jedna. Jednostavna aproksimacija originalnog signala se dobija korelacijom vektora mjerenja i matrice mjerenja (rječnik) čime se formira vektor p :

$$p = \Phi^T y. \quad (38)$$

Najveći element vektora p predstavlja estimaciju nenultog koeficijenta originalnog signala.

$$t^* = \arg \max_t |p_t|. \quad (39)$$

U cilju jednostavnosti pretpostavimo da originalni signal ima samo jedan nenulti element – što je zapravo i pretpostavka u svakoj iteraciji (Slika 7).



Slika 7: Formiranje vektora mjerenja kada originalni signal ima samo jedan nenulti element

Formiranjem elemenata vektora p zapravo se filtriraju elementi sve dok ne ostanu nenulti – korelacija vektora mjerenja i matrice mjerenja će za sve druge elemente, osim za nenulti, biti nula ili približno nula dok će za nenulti element imati značajno veću vrijednost. Na ovaj način, izdvajanjem maksimalne vrijednosti t^* iz vektora p (40), izdvajamo nenulti koeficijent originalnog signala na osnovu kojeg se vrši rekonstrukcija.

Pronalaženjem prvog koeficijenta formira se početna estimacija originalnog signala a zatim se postupak ponavlja, računajući u svakoj iteraciji vektor p za onaj dio signala koji nije još uvijek rekonstruisan (ostatak tj. rezidual). Ovaj postupak se ponavlja sve dok ostatak ne postane veoma mali (tj. padne ispod nekog određenog praga).

3.3.2 Algoritam sa metodom pretraživanja na osnovu ortogonalnog podudaranja (*Orthogonal Matching Pursuit - OMP*)

OMP algoritam je zapravo poboljšana verzija algoritama koji se zasnivaju na metodi pretraživanja na osnovu podudaranja. Princip je isti – pri svakoj iteraciji se bira element iz rječnika koji najbolje

aproksimira ostatak. Razlika je u tome što se za dobijanje koeficijenata, umjesto skalarnog proizvoda ostatka i elementa iz rječnika, sada originalna funkcija prilagođava svim elementima rječnika koji su izdvojeni u iteracijama od početka rada algoritma. Ovo se postiže upotrebom metode najmanjih kvadrata ili projekcijom funkcije ortogonalno na selektovane elemente rječnika.

U nastavku je opisana šema rada OMP algoritma.

 Ulazni podaci algoritma su:

- Matrica mjerenja $\Phi \in R^{m \times n}$
- Vektor mjerenja $y \in R^m$
- Nivo rijetkosti k , originalnog signala $x \in R^n$

 Izlazni podaci algoritma su:

- Estimacija $\hat{x} \in R^n$, originalnog signala x
- Skup Λ_k koji sadrži pozicije nenultih elemenata estimacije $\hat{x}$
- Aproksimacija mjerenja y na osnovu a_k
- Ostatak $r = y - a_k$

Princip rada algoritma:

- 1: $r^{(0)} \leftarrow y$  Inicijalizacija ostatka
- 2: $\Lambda^{(0)} = \emptyset$  Inicijalizacija pozicija nenulatih elemenata (na početku ovo je prazan skup)
- 3: **for** $i = 1, 2 \dots k$
- 4: $\lambda^{(i)} \leftarrow \arg \max_{j=1, \dots, n} |\langle r^{(i-1)}, \phi_j \rangle|$  Pronalaženje kolone matrice Φ koja ima najveću korelaciju sa r_{i-1}
- 5: $\Lambda^{(i)} \leftarrow \lambda^{(i-1)} \cup \Lambda^{(i)}$
- 6: $\Phi_{(i)} \leftarrow [\Phi^{(i-1)} \phi_{\lambda^{(i)}}]$
- 7: $x^{(i)} \leftarrow \arg \min_x \|y - \Phi^{(i)} x\|_2$  Pronalaženje nove aproksimacije signala metodom najmanjih kvadrata
- 8: $a^{(i)} \leftarrow \Phi^{(i)} x^{(i)}$  nova aproksimacija
- 9: $r^{(i)} \leftarrow y - a^{(i)}$  novi ostatak
- 10: **end for**
- 11: $x \leftarrow x^{(k)}$
- 12: **return** $x, \Lambda^{(k)}, a^{(k)}, r^{(k)}$

3.4 Iterativni algoritam sa pragovanjem (IPA)

Iterativni algoritam sa pragovanjem (IPA) je algoritam za CS rekonstrukciju signala koji se zasniva na analizi efekata izazvanih nedostajućim odbircima u posmatranom domenu.

Ovaj algoritam se bazira na pretpostavci da je signal koji se razmatra rijedak u DFT domenu. Nakon komprimovanog odabiranja, DFT reprezentacija signala nije rijetka zato što nedostajući odbirci u vremenskom domenu uzrokuju pojavu šuma u spektralnom domenu (što je u ovom slučaju DFT domen). Kao što je već napomenuto, rijetkost je neophodna osobina signala kako bi njegova rekonstrukcija tehnikom CS-a bila moguća. Da bi se odredile pozicije nenultih koeficijenata signala, koji zapravo nose korisnu informaciju, najprije je potrebno definisati neželjene komponente koje se javljaju u spektralnom domenu posmatranog signala (šum). Naime, potrebno je naći vezu između nedostajućih odbiraka i varijanse nastalog šuma.

Pod pretpostavkom da se posmatrani signal $\mathbf{x}=\mathbf{x}(n)$, $n=1,\dots,N$ u frekvencijskom domenu sastoji od K sinusoida definisanih amplitudama A_i i frekvencijama k_i , $i=1,\dots,K$. DFT reprezentacija ovakvog signala je:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^K A_i e^{-2\pi j(k-k_i)n/N} . \quad (40)$$

Nakon odabiranja, set odbiraka h se može definisati kao:

$$h(n) = \left\{ \sum_{i=0}^K A_i e^{-2\pi j(k-k_i)n/N}, n=0,\dots,N-1 \right\}, \quad (41)$$

pri čemu važi $\sum_{n=0}^{N-1} h(n) = 0$. Nakon procesa uzimanja mjerenja formira se vektor y koji sadrži $M \ll N$ elemenata iz skupa odbiraka h . DFT ovih odbiraka se definiše na sljedeći način:

$$F(k) = \sum_{n=1}^M y(n) = \sum_{n=1}^M h(n) - v(n), \quad (42)$$

pri čemu je $v(n)$ šum. Na pozicijama nedostajućih odbiraka šum je zapravo: $v(n)=h(n)$.

Srednja vrijednost DFT vektora $\mathbf{F}$ se može izračunati:

$$E\{F\} = \sum_{i=1}^K MA_i \delta(k - k_i). \quad (43)$$

Varijansa na pozicijama na kojima se nalazi samo šum se može izračunati kao:

$$\sigma^2 = \text{var}\{F_{k \neq k_i}\} = \frac{M(N-M)}{(N-1)} \sum_{k=1}^K A_i^2. \quad (44)$$

DFT vrijednosti na pozicijama na kojima se nalazi samo šum se mogu opisati Rajlijevom distribucijom:

$$f(z) = \frac{2z}{\sigma^2} e^{-z^2/\sigma^2}, \quad z \geq 0 \quad (45)$$

Obzirom na to da je DFT vrijednost najmanjih komponenti signala jednaka MA_{min} korišćenjem Rajlijeve distribucije može se odrediti vjerovatnoća da se $N-K$, DFT vrijednosti šuma nalaze ispod najmanje komponente MA_{min} :

$$P_e = 1 - \left(1 - e^{-\frac{|X_{min}|^2}{\sigma^2}} \right)^{N-K} \approx 1 - \left(1 - e^{-\frac{M^2 A_{min}^2}{\sigma^2}} \right)^N \quad (46)$$

Korišćenjem (47), može se približno odrediti vjerovatnoća greške pri detekciji najmanje komponente signala koja je temelj za dalju rekonstrukciju (P_e).

Princip rada algoritma:

1: P_e  Inicijalizacija vjerovatnoće greške (preporučljivo je izabrati veliku vrijednost kako bi se osigurala pravilna rekonstrukcija npr. $P_e = 10^{-2}$)

2: $M, N, \sum_{i=1}^K A_i^2$  Za date parametre (dužina vektora mjerenja, dužina signala, energija signala) računa se varijansa DFT vrijednosti na pozicijama na kojima je samo šum

3: $M_{opt} \geq \arg \min \{P_e\}$  Računanje optimalnog broja dostupnih odbiraka

4: $T = \sqrt{-\sigma^2 \log(1 - N\sqrt{P_e})}$  Računanje praga šuma

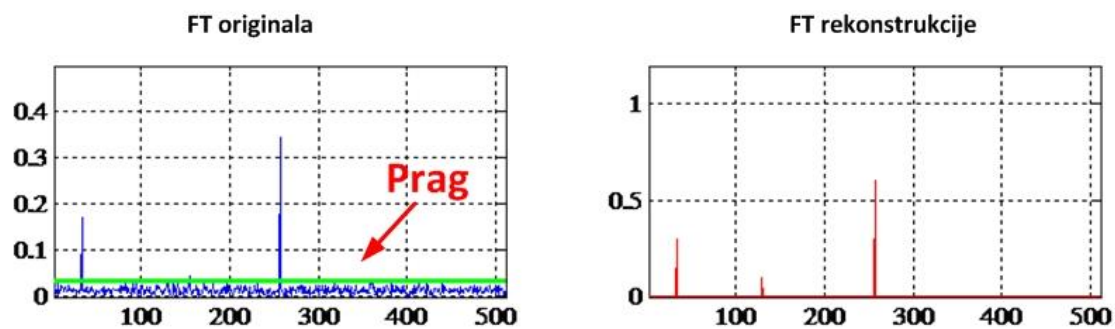
5: $X(k) = \sum_{i=1}^M y(n)$  Računanje inicijalnog DFT vektora X koji odgovara setu mjerenja M

6: $\mathbf{k} = \arg \{ |X| > T \}$  Računanje pozicija DFT komponenti koje su iznad praga

7: $\mathbf{X} = (\Theta^* \Theta)^{-1} \Theta^* \mathbf{y}$  Računanje DFT vrijednosti na pozicijama k metodom najmanjih kvadrata

CS matrica Θ se formira na osnovu DFT matrice pri čemu redovi odgovaraju frekvencijama k , a kolone dostupnim mjerenjima M .

Na Slici 8 je prikazan primjer FT domena originalnog i rekonstruisanog signala upotrebom IPA algoritma:



Slika 8: FT domen originalnog signala (lijevo) i njegove rekonstrukcije (desno) upotrebom IPA algoritma

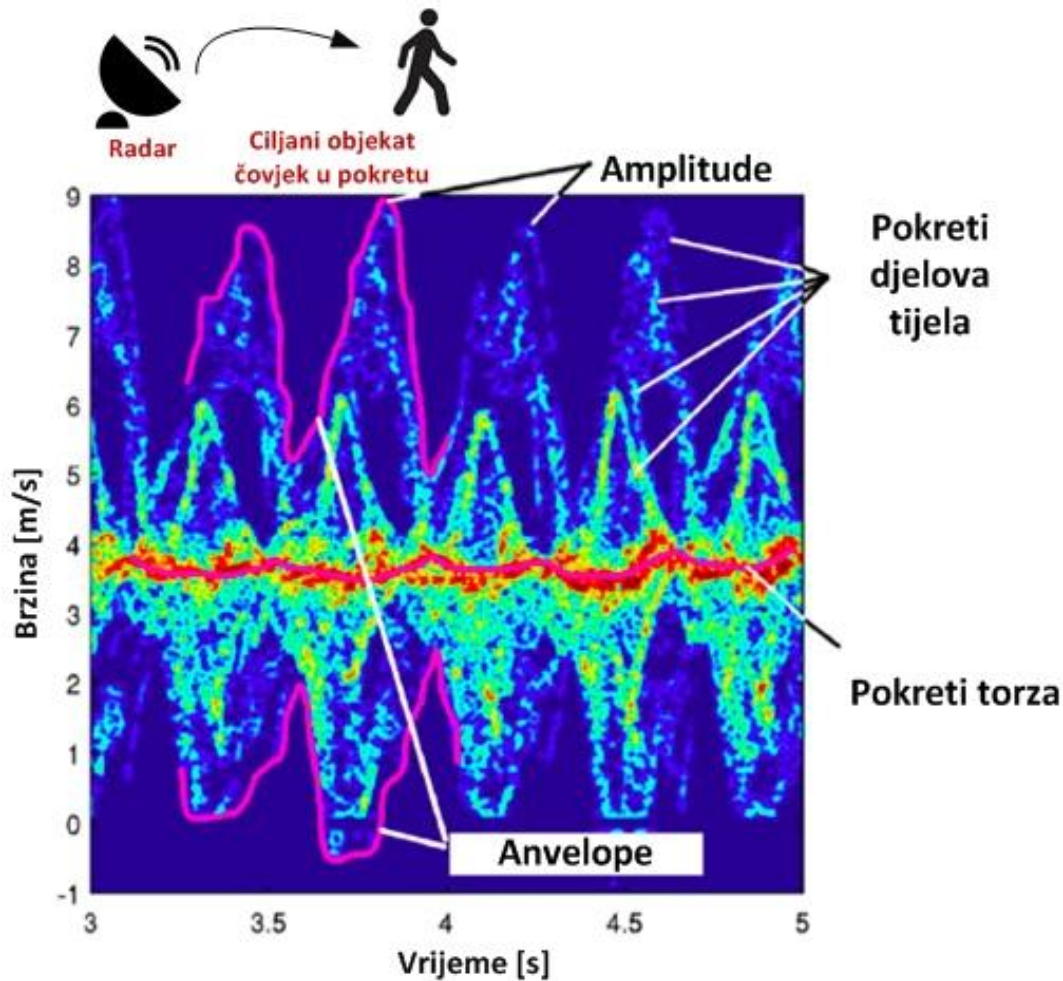
U tabeli su prikazane vrijednosti pragova i optimalnog broja odbiraka za različite vrijednosti amplituda i vjerovatnoća greške. Rezultati pokazuju da optimalan broj odbiraka upotrebom IPA algoritma za CS rekonstrukciju opada sa porastom vjerovatnoće greške.

Vjerovatnoća greške	Amplituda	Optimalan broj odbiraka M_{opt}	Prag
$P_e=0.001$	0.6	22	0.0126
	0.3	88	0.0235
	0.1	337	0.0295
$P_e=0.01$	0.6	18	0.0120
	0.3	78	0.0234
	0.1	318	0.0316
$P_e=0.1$	0.6	15	0.0118
	0.3	65	0.0232
	0.1	296	0.0344
$P_e=0.9$	0.6	9	0.0115
	0.3	48	0.0255
	0.1	255	0.0437

4. CS rekonstrukcija signala sa polinomijalnom i sinusoidalnom faznom modulacijom

Obzirom na to da realni signali nisu rijetki, potrebno ih je predstaviti u odgovarajućem transformacionom domenu kako bi mogli da se dalje odabiraju. Kao najčešći domen za rijetku reprezentaciju signala koristi se Furijeov transformacioni domen u kojem se signal predstavlja sumom sinusoida. Međutim, signali sa kojima se susrećemo u realnim aplikacijama često imaju drugačiju prirodu i nisu rijetki čak ni nakon modelovanja DFT domenom. Jedan od primjera ovakvih signala su signali koji se susreću u radarima - u ovom slučaju signal se prenosi do ciljanog objekta, a zatim reflektuje nazad do radara. Kada se poslati signal reflektuje sa objekta koji je u pokretu, kretanje objekta uzrokuje pomjeranje frekvencije nosioca signala. Takođe, rotacije ili vibracije djelova tijela uzrokuju dodatne fazne modulacije reflektovanog signala što stvara neželjene sporedne efekte oko nosioca signala (mikro-Doplerov efekat) (Slika 9).

Iako se glavna komponenta signala može modelovati sumom sinusoida, ovi dodatni efekti su zapravo signali sa sinusoidalnom ili polinomijalnom faznom modulacijom. Ovi fazno modulirani signali (koji se često sastoje od više fazno moduliranih komponenti) ne zadovoljavaju svojstvo rijetkosti u DFT domenu pa ih je potrebno modifikovati prije same primjene Compressive Sensing-a.



Slika 9: Mikro Doplerov efekat izazvan pokretanjem dijelova tijela targetiranog objekta

4.1 Rekonstrukcija CS signala sa sinusoidalnom faznom modulacijom

Glavni problem kod primjene CS tehnike na signale sa sinusoidalnom faznom modulacijom je odrediti domen u kojem su ovi signali spars kako bi se CS mogao primijeniti.

Posmatrajmo signal s koji se sastoji od sume K komponenti sa sinusoidalnom faznom modulacijom:

$$s(m) = \sum_{i=1}^K s_i(m) = \sum_{i=1}^K A_i e^{j \frac{2\pi}{M} b_i \sin(2\pi a_i m/M) + j \frac{2\pi}{M} c_i m} \quad (47)$$

gdje su a, b i c cjelobrojni koeficijenti, m je diskretni vremenski parametar, a M je ukupan broj odbiraka signala (dužina signala). Amplitude komponenti označene su sa A_i . Kada se ovaj signal predstavi u DFT domenu dobija se:

$$S(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^K A_i e^{j \frac{2\pi}{M} b_i \sin(2\pi a_i m/M) + j \frac{2\pi}{M} m c_i} e^{-j \frac{2\pi}{M} m k} \quad (48)$$

Signal (48) nije rijedak u DFT-u. Zapravo, ovakav signal nije rijedak ni u drugim često korišćenim transformacionim domenima (DCT, DWT itd.) i kao takav nije odgovarajući za CS tehniku. U cilju obezbjeđivanja svojstva rijetkosti ovakvih signala uvodimo tehniku demodulacije:

$$v(m) = e^{-j \frac{2\pi}{M} b \sin(2\pi a m/M)} \quad (49)$$

Funkcija demodulacije v kompenzuje nelinearni dio fazne modulacije posmatranog signala. Naime, kada se set parametara (a, b) funkcije v poklopi sa makar jednim od faznih parametara komponenti signala $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_K, b_K)$ odgovarajuća komponenta će se demodulisati i svesti na sinusoidu (koja je rijetka u DFT domenu).

Nakon demodulacije, i -ta komponenta signala će imati oblik:

$$d_i(m) = A_i e^{j \frac{2\pi}{M} m c_i} \quad (50)$$

Proces demodulacije je potrebno primijeniti iterativnim postupkom na svaku komponentu signala. Za svaku komponentu zasebno se vrši pretraga odgovarajućih parametara na sljedeći način:

for: $a \in (a_{min}, a_{max})$ and $b \in (b_{min}, b_{max})$

if: $DFT\{s(m) \cdot v(m), m=0, \dots, N-1\}$ ima dominantnu komponentu na $k=c_i$

then: $a=a_i, b=b_i$

U ovom slučaju, spektar $S(k)$ je koncentrisan na poziciji $k = c_i$. Za $a \neq a_i$ ili $b \neq b_i$ spektar će biti rasut po svim frekvencijama. Ovdje važi:

$$M|A_{\min}| > \sum_{i=1}^K |A_i| \quad (51)$$

Kako bi se primijenila tehnika CS-a u kombinaciji sa navedenom demodulacijom, signal od interesa se definiše (u vektorskom obliku) kao:

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} \circ \mathbf{V} \quad (52)$$

tako da $\mathbf{X}$ sadrži odbirke signala $\mathbf{S}$ pomnožene sa funkcijom demodulacije v pri čemu je:

$$v(m) = \exp -j \frac{2\pi}{M} b_i \sin(2\pi a_i m / M), m \in (0, \dots, M-1) \quad (53)$$

Onda se DFT ovako demodulisanog signala može napisati kao:

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{X} \quad (54)$$

gdje je $\mathbf{X}$ vektor DFT koeficijenata, a $\Psi \in \mathbb{R}^{M \times M}$ DFT matrica.

Za odabrani par parametara (a, b) u v koji je jednak parametrima (a_i, b_i) u s , važi da je $\mathbf{X} = \mathbf{X}_i$

i definisano je i -tom sinusoidalnom komponentom na frekvenciji c_i koja postaje dominantna u spektru.

Ako posmatramo iz perspektive primjene CS-a, x je komprimovano odabran signal predstavljen sa nepotpunim setom N slučajno uzetih odbiraka.

Ovo znači da je signal s zamijenjen vektorom slučajno uzetih mjerenja y :

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{s} \circ \mathbf{v}) \quad (55)$$

pa se problem kombinacijom (54) i (55) svodi na:

$$\mathbf{y} = \Phi\Psi\mathbf{X} = \Theta\mathbf{X} \quad (56)$$

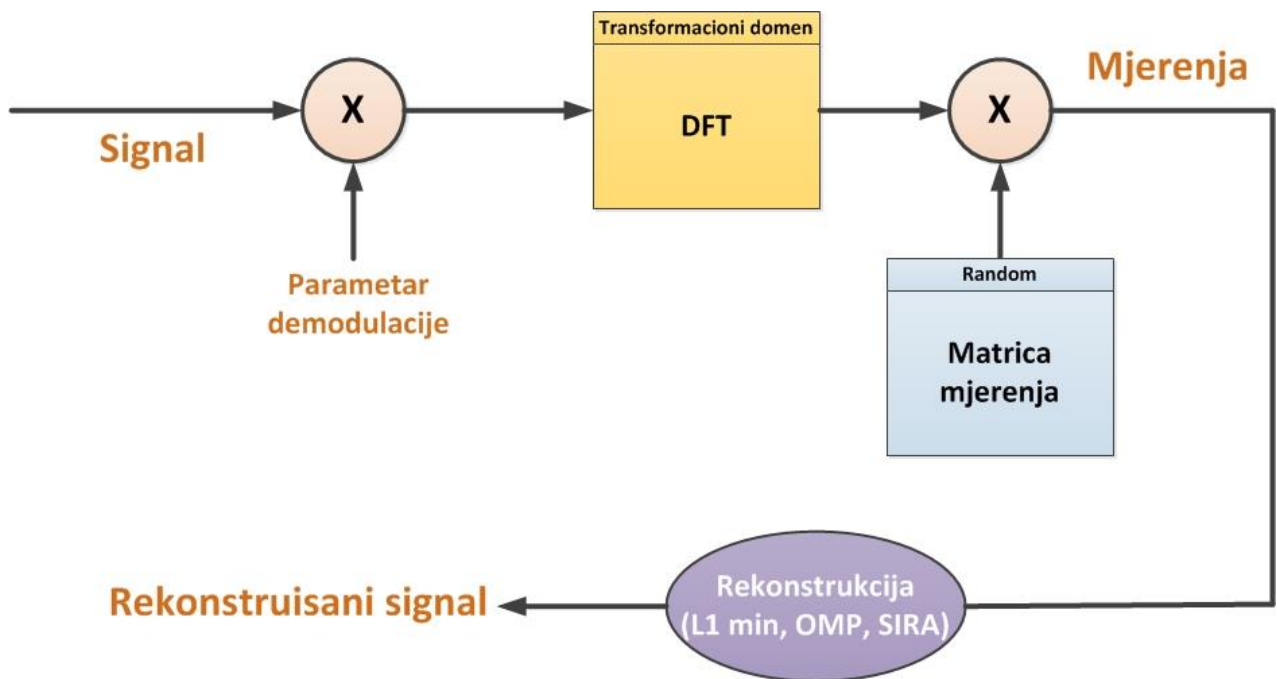
Kada se kroz iteracije primijeni prethodno opisan postupak, u slučaju poklapanja parametara $a = a_i$, $b = b_i$ DFT vektor $\mathbf{X}$ se može smatrati demodulisanim i -tom komponentom signala odnosno važi:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_i \quad (57)$$

Ovakav signal je spars i može se dalje rekonstruisati upotrebom nekih od već opisanih algoritama za CS rekonstrukciju.

U slučaju kada se parametri ne poklapaju tj. $a \neq a_i$, $b \neq b_i$ za $\forall i$ i $N \ll M$, neće doći do demodulacije što znači da se u spektru neće pojaviti nijedna dominantna komponenta (signal nije rijedak) i samim tim je algoritam neće detektovati (ukoliko koristi pragovanje) ili će je detektovati kao šum.

Šema procesa koji se ponavlja u svakoj iteraciji (za unaprijed zadate parametre) data je na Slici :



Slika 10: Proces primjene CS-a na fazno modulisane signale

Kako se u realnim aplikacijama najčešće susrećemo sa višekomponentnim signalima mora se uzeti u obzir i šum koji nastaje usred kros-korelacije među komponentama signala. Ovo znači da se mora rekonstruisati željena (i -ta) komponenta i pored rasutog šuma. Kros-korelacija među komponentama signala znatno utiče na proces rekonstrukcije što se ogleda u različitim rekonstrukcijama istog signala dobijenih upotrebom različitih algoritama.

U ovakvim situacijama više uspjeha imaju algoritmi sa pragovanjem (npr. IPA) zato što oni detektuju samo spars komponentu signala odbacujući sav šum koji ima manju vrijednost od praga, što će biti prikazano kroz poglavlje koje se odnosi na eksperimentalne rezultate.

Kako bi rekonstrukcija signala bila potpuna, potrebno je pronaći i tačne vrijednosti amplituda signala (vektor A). Ove vrijednosti se nalaze kao rješenje jednačina:

$$\mathbf{A}=(\Delta^H \times \Delta)^{-1} \times \Delta^H \times \mathbf{y}, \quad (58)$$

pri čemu je:

$$\Delta = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{M}b_1(\sin(2\pi m_1 a_1)+m_1 c_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{M}b_K(\sin(2\pi m_1 a_K)+m_1 c_K)} \\ e^{j\frac{2\pi}{M}b_1(\sin(2\pi m_2 a_1)+m_2 c_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{M}b_K(\sin(2\pi m_2 a_K)+m_2 c_K)} \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{j\frac{2\pi}{M}b_1(\sin(2\pi m_N a_1)+m_N c_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{M}b_K(\sin(2\pi m_N a_K)+m_N c_K)} \end{bmatrix}, \quad (59)$$

pri čemu vrste matrice Δ odgovaraju mjerenjima $(m_1, m_2, \dots, m_N)$, a kolone ove matrice frekvencijama a_i za $i=1, \dots, K$.

4.2 CS Rekonstrukcija višekomponentnih signala sa nelinearnom faznom modulacijom

U ovom poglavlju će se razmatrati CS rekonstrukcija višekomponentnih signala sa polinomijalnom i kosinusoidalnom faznom modulacijom. Ovakvi signali ne zadovoljavaju spars svojstvo u Furijeovom transformacionom domenu zbog čega ih je potrebno dodatno modifikovati prije samog procesa CS rekonstrukcije.

Posmatrajmo signal x koji je sačinjen od P polinomijalno i kosinusoidalno fazno moduliranih komponenti:

$$x(n) = \sum_{i=1}^P x_i(n) = \sum_{i=1}^P A_i e^{j\frac{2\pi}{M} b_i \cos(\frac{2\pi a_i n}{M}) + j\frac{2\pi}{M} c_i n} + B_i e^{j\frac{2\pi}{M} (nd_{1i} + \frac{n^2 d_{2i}}{2} + \dots + \frac{n^m d_{mi}}{m!})}, \quad (60)$$

gdje su a_i, b_i, c_i, d_i cjelobrojni koficijenti, n je parametar diskretizacije, A_i, B_i su amplitude a M je dužina signala.

DFT reprezentacija ovog signala je:

$$x(k) = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{i=1}^P x_i(n) = \sum_{i=1}^P A_i e^{j\frac{2\pi}{M} b_i \cos(\frac{2\pi a_i n}{M}) + j\frac{2\pi}{M} c_i n} e^{-j\frac{2\pi}{M} nk} + \\ + B_i e^{j\frac{2\pi}{M} (nd_{1i} + \frac{n^2 d_{2i}}{2} + \frac{n^m d_{mi}}{m!})} e^{-j\frac{2\pi}{M} (\frac{n^2 k_2}{2} + \dots + \frac{n^m k_m}{m!})} e^{-j\frac{2\pi}{M} nk}. \quad (61)$$

Kao što se iz (61) vidi, signal nije rijedak i potrebno je uraditi demodulaciju kako bi se obezbijedila rijetkost. Obzirom na to da u signalu postoje dvije različite vrste komponenti – komponenta sa polinomijalnom i komponenta sa kosinusoidalnom faznom modulacijom proces demodulacije se usložnjava i potrebno je koristiti različite parametre demodulacije.

Parametar demodulacije za komponentu sa sinusoidalnom faznom modulacijom je:

$$\delta(n) = e^{-j\frac{2\pi}{M}b\cos(\frac{2\pi an}{M})} \quad (62)$$

Parametar demodulacije za komponentu sa polinomijalnom faznom modulacijom je:

$$\sigma(n) = e^{-j(\frac{d_2 n^2}{2} + \dots + \frac{d_m n^m}{m!})} \quad (63)$$

Demodulacija se primjenjuje “korak po korak” tj. za svaku komponentu signala posebno. Parametri (a, b) se mijenjaju kroz iteracije sve dok se ne poklope sa jednim parom kosinusoidalnih faznih parametara $(a_1, b_1), \dots, (a_p, b_p)$.

U trenutku poklapanja komponenta će biti demodulisana i samim tim svedena na sinusoidu. Ovakva komponenta će biti dominanta u spektru nakon čega je moguća rekonstrukcija.

Procedura je identična kada su u pitanju polinomijalni fazni parametri. Naime, kada se parameteri $(d_2, \dots, d_p)$ poklope sa parametrima $(d_{2i}, \dots, d_{mp})$ u (61) ova komponenta će se demodulisati i svesti na sinusoidu.

Demodulacija kosinusno modulisane komponente je:

$$S = X\delta. \quad (64)$$

Demodulacija polinomijalno modulisane komponente je:

$$Z = X\sigma. \quad (65)$$

Kada se primjenjuje CS tehnika na ovakav signal, umjesto originalnog signala riječ je o setu slučajno odabranih mjerenja:

$$y_s = \Phi s = \Phi F^{-1} S = \Theta S, \quad (66)$$

gdje je S DFT vektor kojem odgovara s

$$y_z = \Phi z = \Phi F^{-1} Z = \Theta Z, \quad (67)$$

gdje je Z DFT vektor kojem odgovara z .

Kada se parametri poklope onda se S ili Z mogu posmatrati kao rijetka reprezentacija i -te komponente signala nakon čega se može primijeniti CS rekonstrukcija.

Za uspješnu rekonstrukciju originalnog signala u ovom slučaju, potrebno je rekonstruisati svaku rijetku, demodulisanu komponentu upotrebom CS algoritama, a zatim rekonstruisati originalni signal na osnovu detektovanih faznih parametara.

5. Eksperimentalni rezultati

5.1 Primjer 1 – Jednokomponenti signal sa sinusoidalnom faznom modulacijom

U ovom poglavlju biće izloženi eksperimentalni rezultati dobijeni upotrebom opisanih algoritama za CS rekonstrukciju fazno moduliranih signala kao i poređenje njihovih performansi u primjeni na ove signale.

Posmatrajmo opisanu tehniku najprije na primjeru jednokomponentnog signala sa sinusoidalnom faznom modulacijom. Ovakav signal ima oblik:

$$x(t) = A_1 * (e^{-jbsin(aT2\pi t/2)} + e^{jT15\pi t}). \quad (68)$$

Uzmimo konkretne vrijednosti:

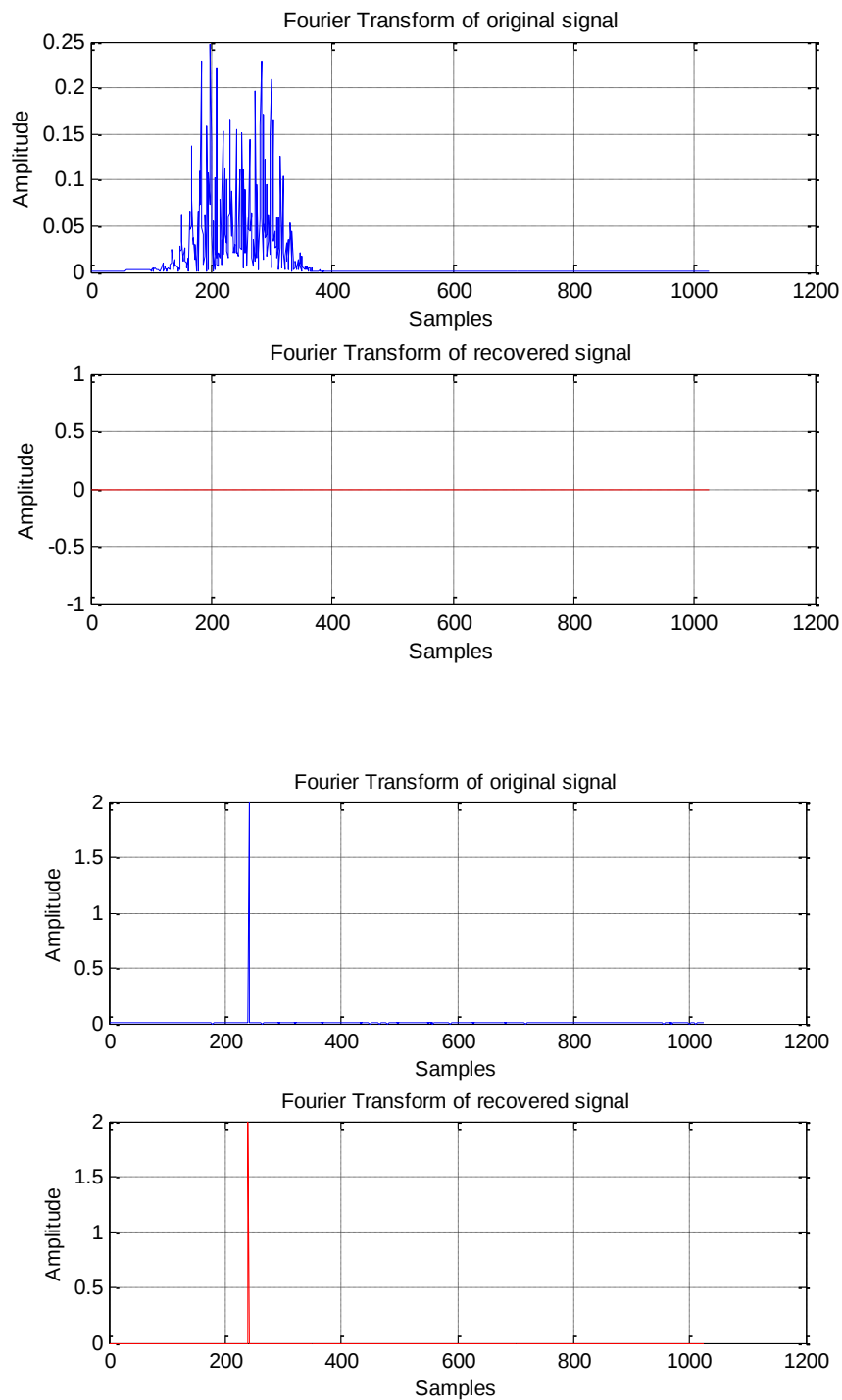
$$x(t) = (e^{-j4sin(0.2T2\pi t/2)} + e^{jT15\pi t}). \quad (69)$$

gdje su vrijednosti amplitude i parametara $A_1=1$, $a=0.2$, $b=4$, vremenski interval $t = [-1/2, 1/2]$ sa korakom $\Delta t = 1/1024$ i $T = 32$. Ukupna dužina signala je $M = 1024$. Rekonstrukcija se vrši na osnovu $K = 24$ slučajno uzetih mjerenja što je samo 2.34 % od ukupne dužine signala ($K \ll M$).

Originalni signal je naprije predstavljen u DFT domenu. Procesom mjerenja je uzet nepotpuni set odbiraka koji je zatim pomnožen sa odgovarajućim parametrom demodulacije:

$$e^{(jbsin(2\pi aTt/2))}. \quad (70)$$

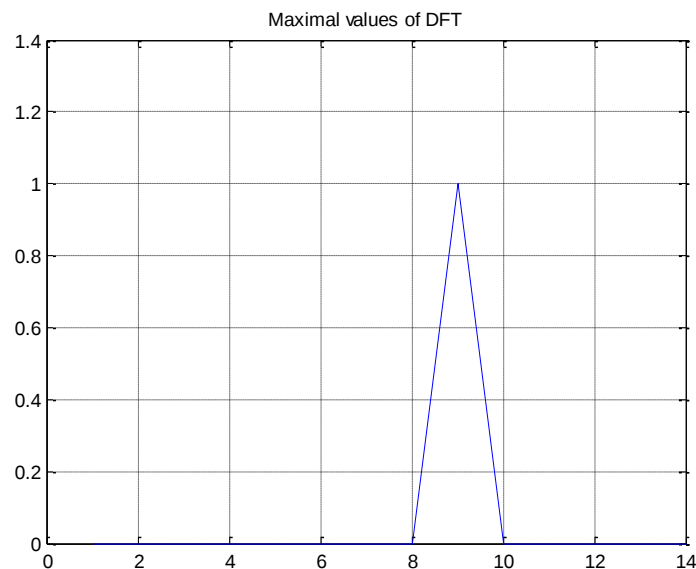
Nakon demodulacije, na osnovu uzetih mjerenja signal je rekonstruisan upotrebom IPA algoritma. (Slika 11)



Slika 11: Rekonstrukcija signala sa sinusoidalnom faznom modulacijom IPA algoritmom kada se parametri u signalu i funkciji demodulacije ne poklapaju (gore) i kada se parametri poklapaju (dolje)

U svakoj iteraciji u kojoj se ne poklope parametri (a, b) iz funkcije demodulacije sa odgovarajućim parametrima signala (u ovom slučaju $a = 0.2$, $b = 4$) DFT signala neće biti rijetka nego raspršena i algoritam neće detektovati dominantnu komponentu. Kada se parametri poklope algoritam će detektovati željenu komponentu.

Na Slici 12 prikazana je maksimalna vrijednost DFT-a demodulisanog signala za 15 različitih vrijednosti parametra a . Kao što se vidi na slici maksimum je na devetoj poziciji što odgovara vrijednostima $a = 0.02T$, $b = 4$, a rezultati rekonstrukcije za ostale vrijednosti parametra a su nula.



Slika 12: Maksimalna vrijednost DFT-a rekonstruisanog signala za 15 različitih vrijednosti parametra a

5.2 Primjer 2 – višekomponentni signal sa sinusoidalnom faznom modulacijom

U ovom primjeru posmatraćemo višekomponentni fazno modulirani signal oblika:

$$x(t) = A_1 \left(e^{-jbsin(aT2\pi t/2)} + e^{jT2\pi t} \right) + A_2 \left(e^{-jbsin(aT2\pi t/2)} + e^{jT10\pi t} \right) \quad (71)$$

Za konkretne vrijednosti parametara i amplituda:

$$x(t) = 4 \left(e^{-j3sin(0.35T2\pi t/2)} + e^{jT2\pi t} \right) + 2 \left(e^{-j5sin(0.35T2\pi t/2)} + e^{jT10\pi t} \right) \quad (72)$$

gdje su vrijednosti amplitude i parametara $A_1=4$, $a=0.35$, $b=3$ za prvu komponentu i $A_2 = 2$, $a = 0.05$, $b = 5$ za drugu komponentu, vremenski interval $t = [-1/2, 1/2]$, sa korakom $\Delta t = 1/1024$ i $T = 32$. Ukupna dužina signala je $M = 1024$. Rekonstrukcija se vrši na osnovu $K = 24$ slučajno uzetih mjerenja što je samo 2.34 % od ukupne dužine signala ($K \ll M$).

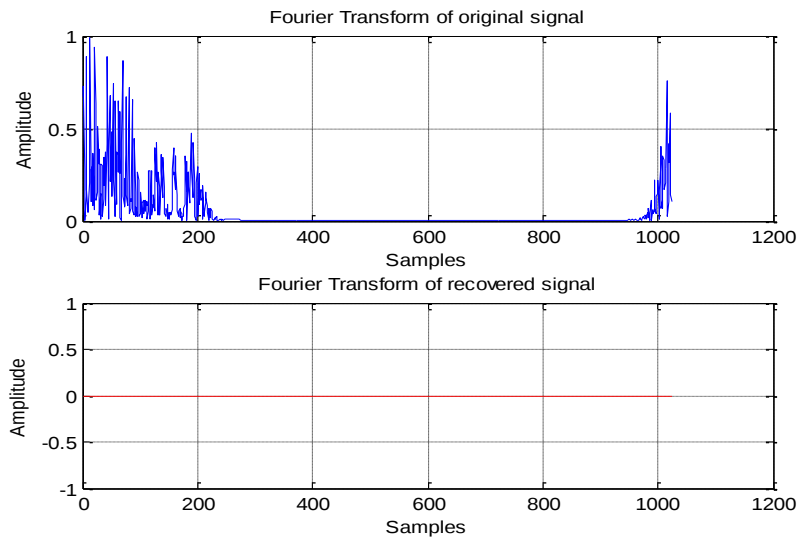
Kao i u prethodnom primjeru, nepotpuni set mjerenja je najprije pomnožen sa funkcijom demodulacije:

$$e^{jbsin(2\pi aTt/2)}. \quad (73)$$

U ovom slučaju postoje dvije različite vrijednosti parametara (a, b) koje odgovaraju različitim komponentama signala, pa je neophodno mijenjati parametre u toku procesa rekonstrukcije kako bi se mogle detektovati obje komponente signala.

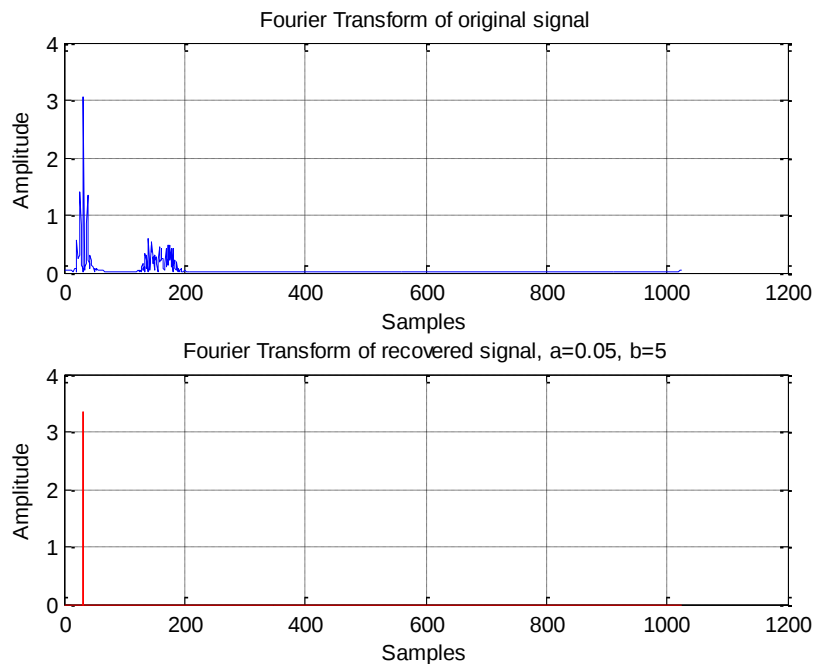
U svakoj iteraciji, rekonstruiše se signal (IPA algoritmom) i računa se njegova DFT reprezentacija.

Kada se parametri signala i demodulacione funkcije ne poklope, DFT originalnog signala je raštrkan i CS algoritam ne može rekonstruisati dominantnu komponentu (Slika 13).

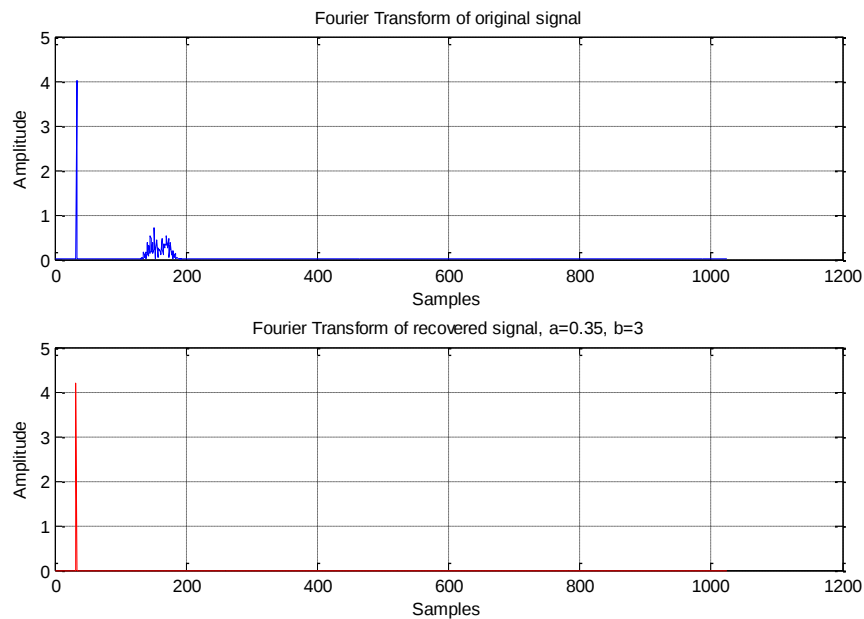


Slika 13: DFT originalnog signala (gore) i rekonstruisanog signala (dolje) kada se parametri ne poklapaju

Kada se željeni parametri poklope, DFT originalnog signala postaje rijetka i CS algoritam uspješno rekonstruiše signal i detektuje odgovarajuće komponente (Slike 14 i 15).

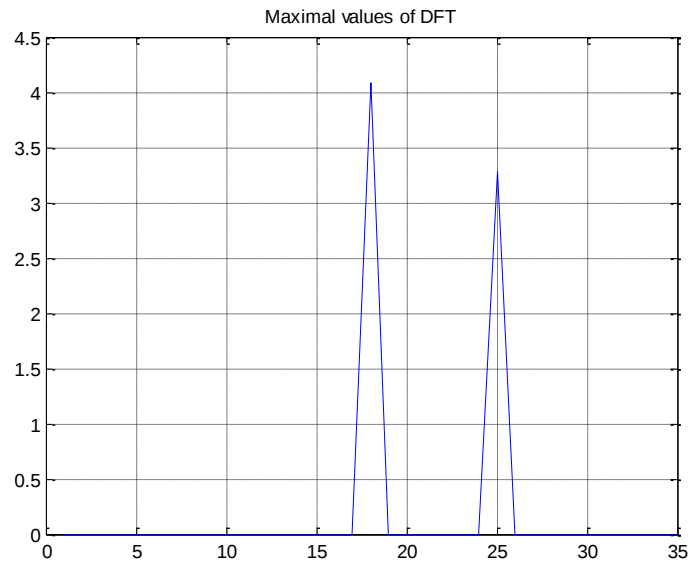


Slika 14: DFT originalnog signala (gore) i rekonstruisanog signala (dolje) kada se poklapaju parametri prve komponente



Slika 15: DFT originalnog signala (gore) i rekonstruisanog signala (dolje) kada se poklapaju parametri druge komponente

Na Slici 16 su prikazane maksimalne vrijednosti DFT-a demodulisanog signala, izračunate za 7 različitih vrijednosti parametra a i 5 različitih vrijednosti parametra b :



Slika 16: Maksimalna vrijednost DFT-a rekonstruisanog signala za 7 različitih vrijednosti parametra a i 5 različitih vrijednosti parametra b

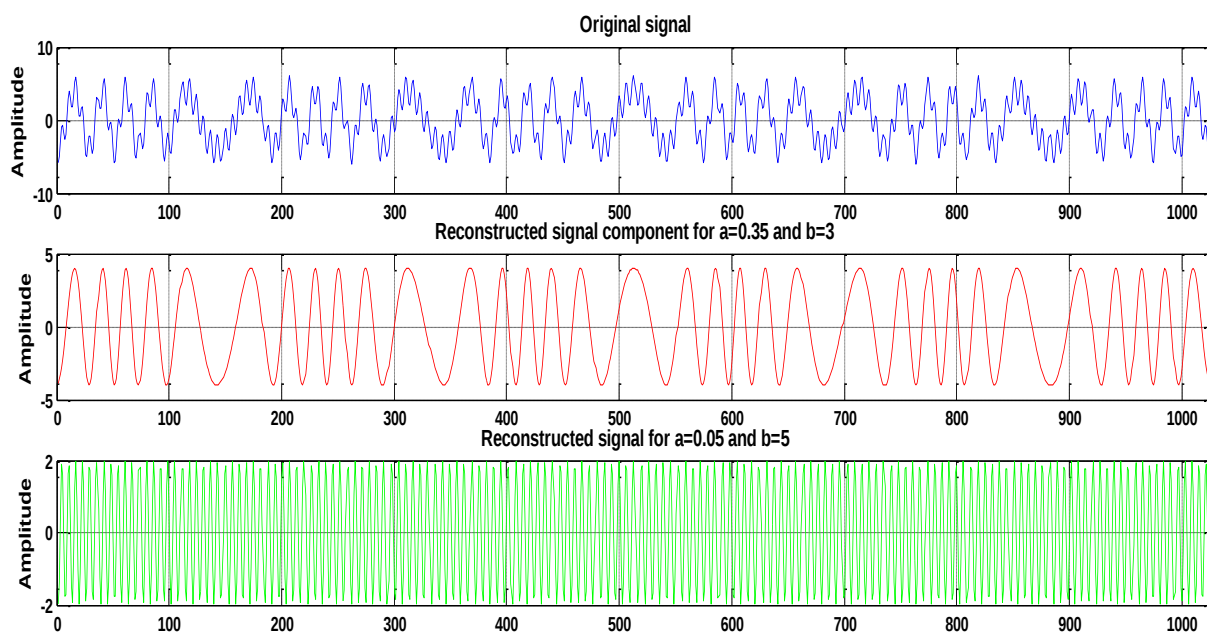
U ovom slučaju postoje dva pika (što je i očekivano obzirom na to da se signal sastojao od dvije komponente) na pozicijama:

✚ 16 (što odgovara vrijednostima parametara $a = 0.35$, $b = 3$)

✚ 25 (što odgovara vrijednostima parametara $a = 0.05$, $b = 5$)

Nakon detekcije značajnih komponenti signala, rekonstruisane su amplitude signala (59), (signal je podvrgnut procesu re-modulacije).

Na Slici 17 je prikazan originalan signal kao i njegove obje rekonstruisane komponente.



Slika 17: Originalni signal (plavom bojom), rekonstruisana prva komponenta signala (crvenom bojom) i rekonstruisana druga komponenta signala (zelenom bojom)

5.3 Primjer 3 – CS Rekonstrukcija višekomponentnog signala sa polinomijalnom i kosinusoidalnom faznom modulacijom

Kroz ovaj primjer će se analizirati performanse tri različita CS algoritma (l_1 min, OMP i IPA) za rekonstrukciju višekomponentnog signala čija jedna komponenta ima kosinusnu faznu modulaciju a druga polinomijalnu faznu modulaciju (u literaturi signali sa polinomijalnom faznom modulacijom se nazivaju čirpovi).

Posmatrajmo signal :

$$x(t) = 3e^{-j\pi T \cdot 7(2t^2+t)} + 2e^{-j\cos(0.75T \cdot 2\pi \frac{t}{2}) + jtT \cdot 15\pi} \quad (74)$$

gdje je vremenski interval $t = [-1/2, 1/2]$, sa korakom $\Delta t = 1/1024$ i $T = 32$. Ukupna dužina signala je $M = 1024$.

Ovakav signal nije rijedak i potrebno ga je demodulisati kako bi se obezbijedilo svojstvo rijetkosti koje je neophodno za primjenu CS-a. Demodulacijom se problem rekonstrukcije svodi na rekonstrukciju sinusoidalnog signala. Obzirom na to da se radi o signalu sa dvije različite komponente, demodulaciju je potrebno obaviti sa dva različita parametra demodulacije (za svaku komponentu po jedan).

Opisana procedura se sastoji iz sljedećih koraka:

- Nakon uzimanja nepotpunog seta, slučajno odabranih mjerenja signal se množi sa funkcijom demodulacije, što je za komponentu sa polinomijalnom faznom modulacijom:

$$e^{(2j\pi pTt^2)} \quad (75)$$

parametar p se traži iterativnom procedurom tako što se mijenja unutar zadatih granica $[p_{\min}, p_{\max}]$

- ✚ Demodulisani signal se zatim rekonstruiše upotrebom tri različita algoritma ($l_1 \min$, OMP i IPA)
- ✚ Pozicija pika (komponente sa najvećom vrijednošću) se čuva za svaki razmatrani algoritam u svakoj iteraciji
- ✚ Procedura se ponavlja za novu vrijednost parametra p sve dok važi $p < p_{\max}$
- ✚ Nakon završetka svih iteracija, pozicija maksimalnog pika (među svim izdvojenim pikovima u iteracijama) trebala bi da otkrije tačnu vrijednost parametra

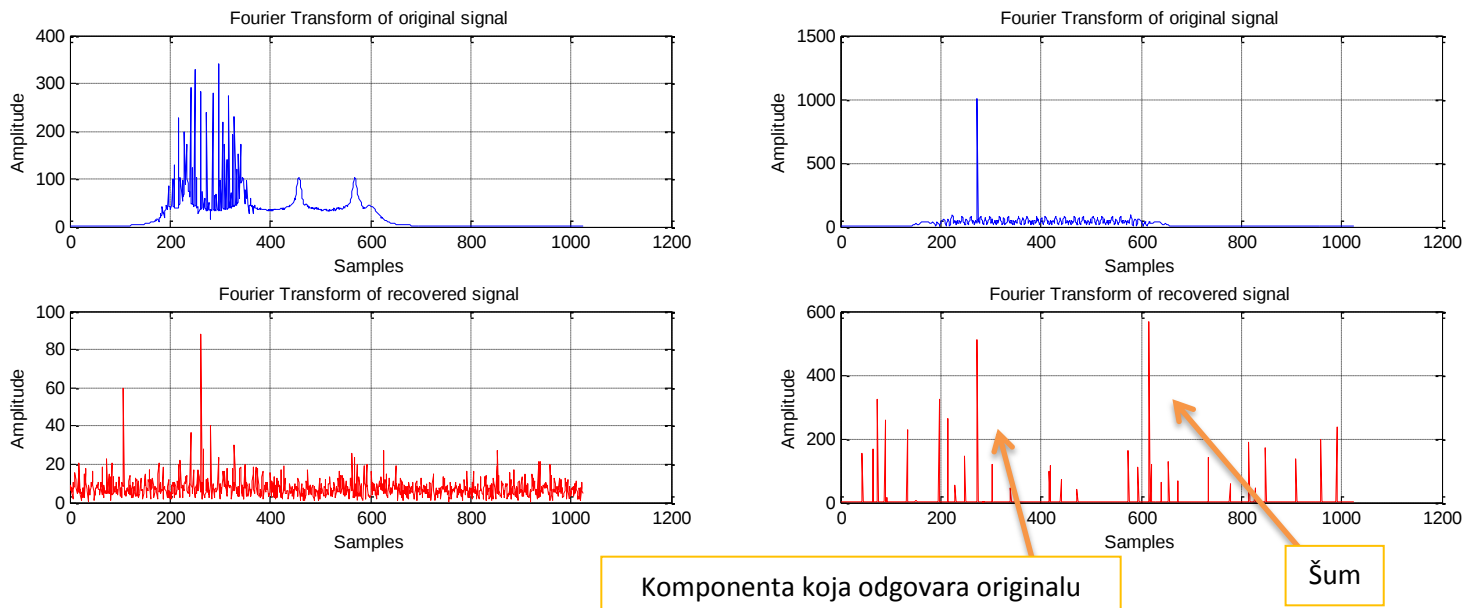
Nakon demodulacije polinomijalne komponente, signal se množi sa funkcijom demodulacije koja odgovara kosinusnoj komponenti:

$$e^{(2j\cos(2\pi qTt/2))} \quad (76)$$

princip rada je isti, parametar q se mijenja u svakoj iteraciji krećući se u domenu $[q_{\min}, q_{\max}]$.

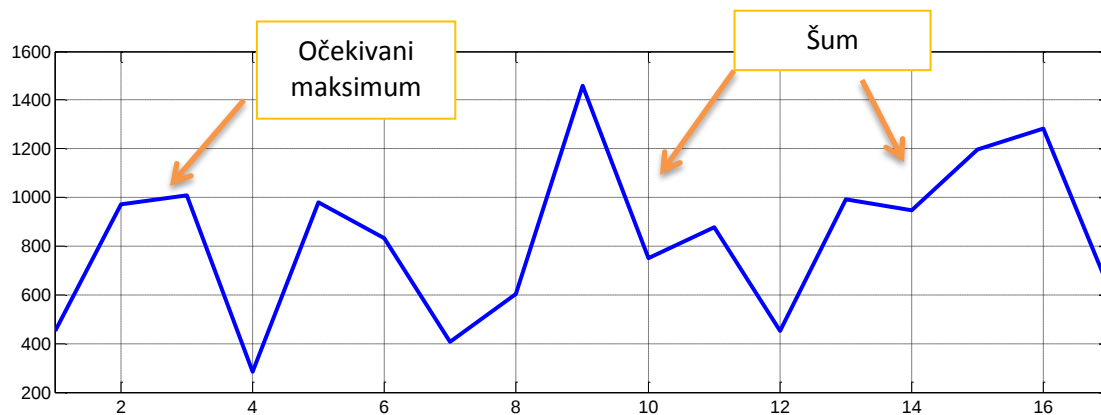
U ovom konkretnom primjeru parametri imaju vrijednosti $p = 7$, $q = 0.75$ a intervali pretrage su $p: [-10, 10]$, $q: [-0.25, 6.25]$. U procesu rekonstrukcije korišćen je različit broj mjerenja, od $N = 32$ (3% od ukupne dužine signala) do $N = 120$ (11.71% od ukupne dužine signala).

Rekonstrukcija je najprije izvršena korišćenjem $l_1 \min$ algoritma. Na Slici 18 je prikazana rekonstrukcija kosinusne komponente tj. DFT originalnog signala i DFT rekonstruisanog signala kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se parametri poklope (desno). Broj uzetih mjerenja je $N = 32$.



Slika 18: DFT originala i rekonstrukcije kosinusne komponente za $N=32$, l1 min algoritam, kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se parametri poklope (desno)

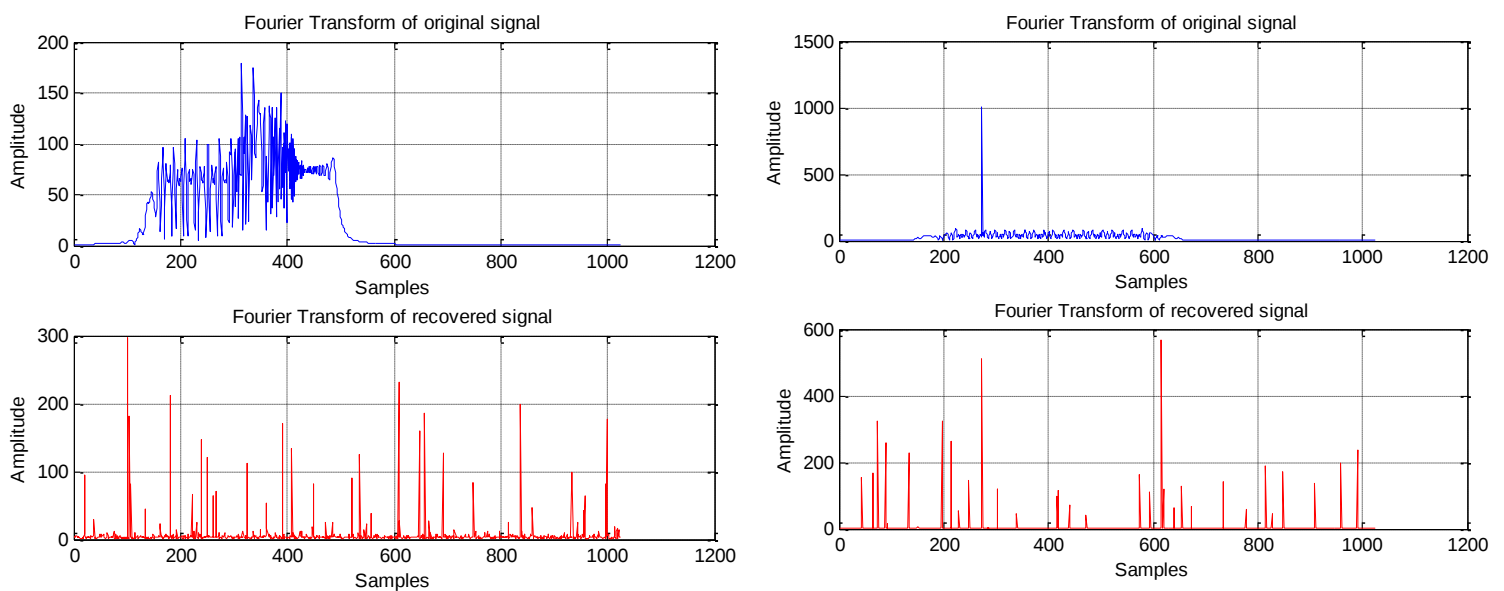
Na Slici 19 prikazana je maksimalna vrijednost DFT-a demodulisanog signala. Kao što se vidi na slici maksimum je na devetoj poziciji, a očekivano je da bude na trećoj poziciji što odgovara vrijednosti $q = 0.75$, $q \in [-0.25, 6.25]$.



Slika 19: Maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente za $N=32$, l1 min algoritam

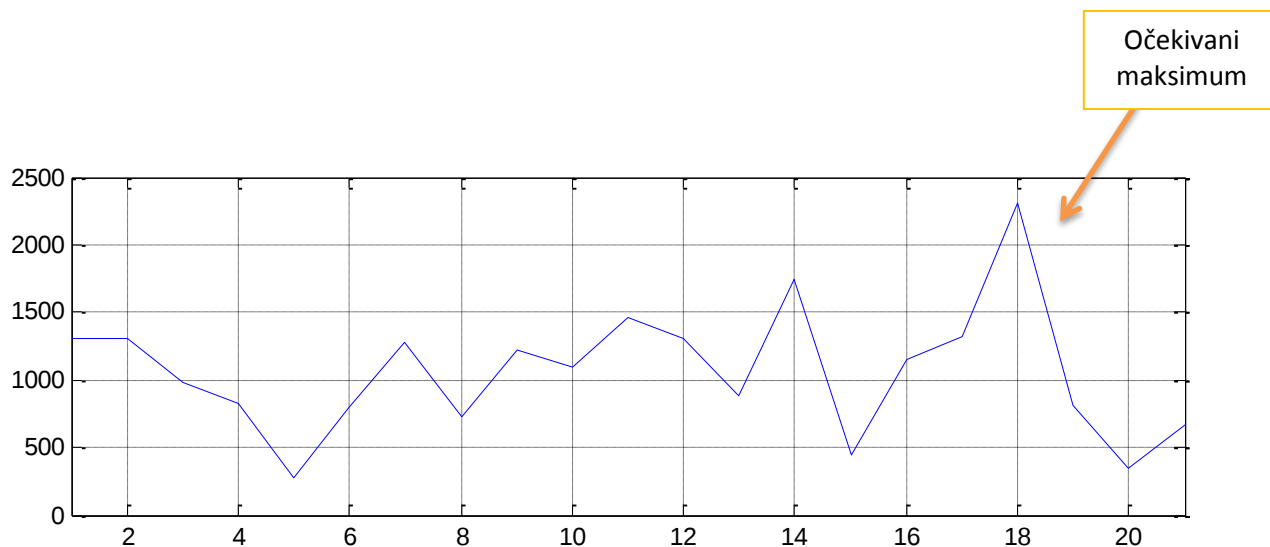
Ovaj algoritam nije rekonstruisao kosinusnu komponentu, umjesto očekivanog maksimuma na trećoj poziciji pojavila se komponenta šuma na devetoj poziciji koji je vidljiv i u DFT-u rekonstrukcije na Slici 16. Šum potiče od uticaja polinomijalne modulirane komponente čiji koeficijenti nisu nula pa signal nije dovoljno rijedak da bi ga ovaj algoritam pravilno rekonstruisao.

Na Slici 20 je prikazan DFT originala i rekonstrukcije polinomijalne komponente signala u istim uslovima:



Slika 20: DFT originala i rekonstrukcije polinomijalne komponente za $N=32$, l1 min algoritam, kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se parametri poklope (desno)

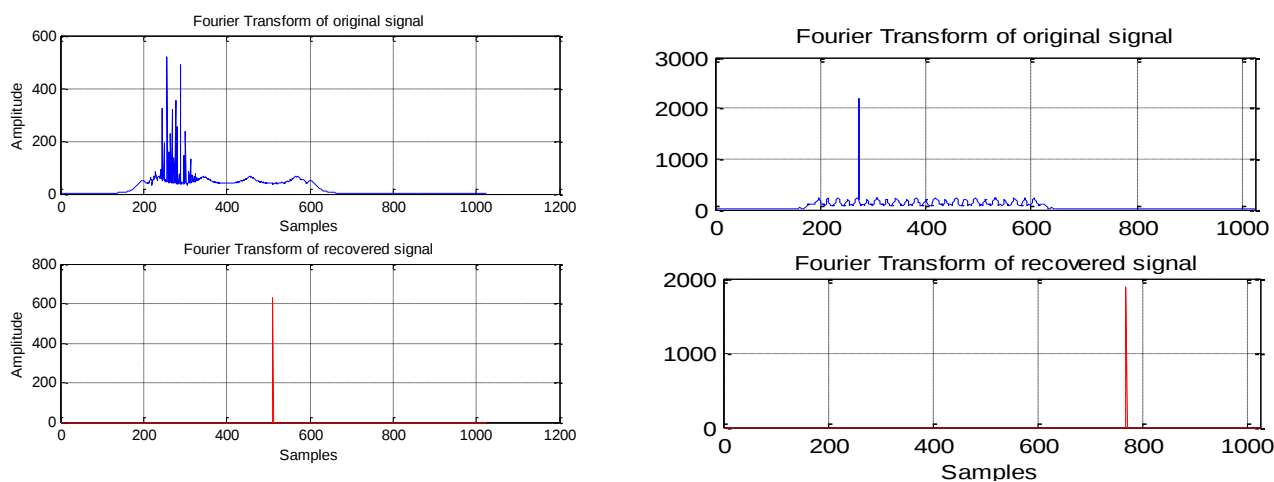
Komponenta sa maksimalnom vrijednosti se nalazi na očekivanoj 17. poziciji što odgovara vrijednostima $p = 7$, $p : [-10, 10]$ (Slika 21).



Slika 21: Maksimum DFT-a rekonstruisane polinomijalne komponente za $N=32$, l1 min algoritam

Algoritam je uspješno rekonstruisao polinomijalnu komponentu signala i pored šuma koji se zbog kroskorelacije sa kosinusoidalnom komponentom javlja u svakoj iteraciji, vrijednost komponente od interesa (na koja se nalazi na sedamnaestoj poziciji) je veća od vrijednosti šuma na svim ostalim pozicijama za $p: [-10, 10]$.

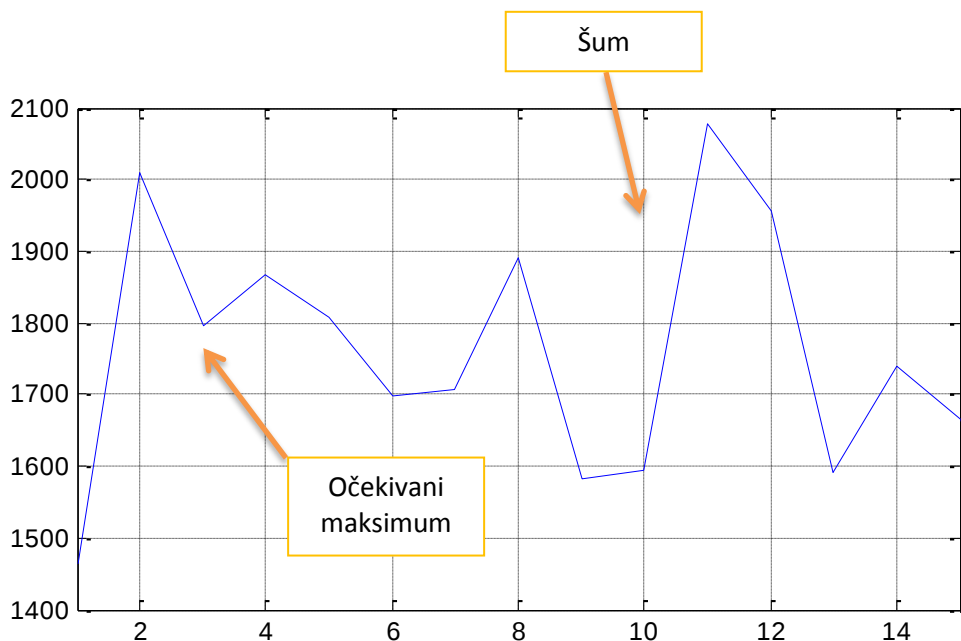
Posmatrajmo sada CS rekonstrukciju istog signala korišćenjem OMP algoritma. Za parametre su uzete iste vrijednosti i intervali pretrage $p = 7$, $q = 0.75$, $p: [-10, 10]$, $q: [-0.25, 6.25]$. Broj odbiraka za rekonstrukciju je $N = 32$. Na Slici 22 je prikazan DFT originala i rekonstrukcije kosinusne komponente u iteracijama kada se parametri ne poklapaju i poklapaju:



Slika 22: DFT originala i rekonstrukcije kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se poklapaju (desno) $N=32$, OMP algoritam

Na slici se uočava da spektar signala kada se parametri ne poklapaju nije rijedak i samim tim nije pogodan za CS rekonstrukciju, dok se u iteraciji u kojoj se parametri poklapaju rekonstrukcija signala svodi na rekonstrukciju sinusoide.

Maksimum DFT-a rekonstruisanog signala je prikazan na Slici 23. Očekivani maksimum je komponenta na 3. poziciji, međutim kao i pri rekonstrukciji korišćenjem l_1 min algoritma, komponenta od značaja nije detektovana nego je isplivao šum koji ima veću vrijednost od tražene komponente:

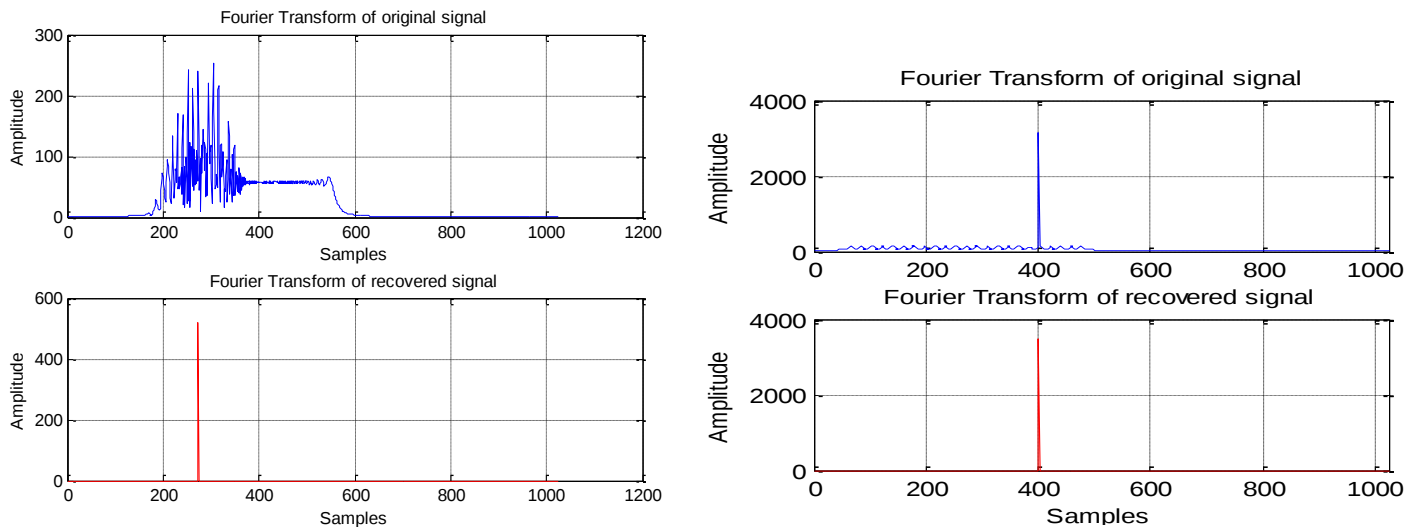


Slika 23: Maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente za $N=32$, OMP algoritam

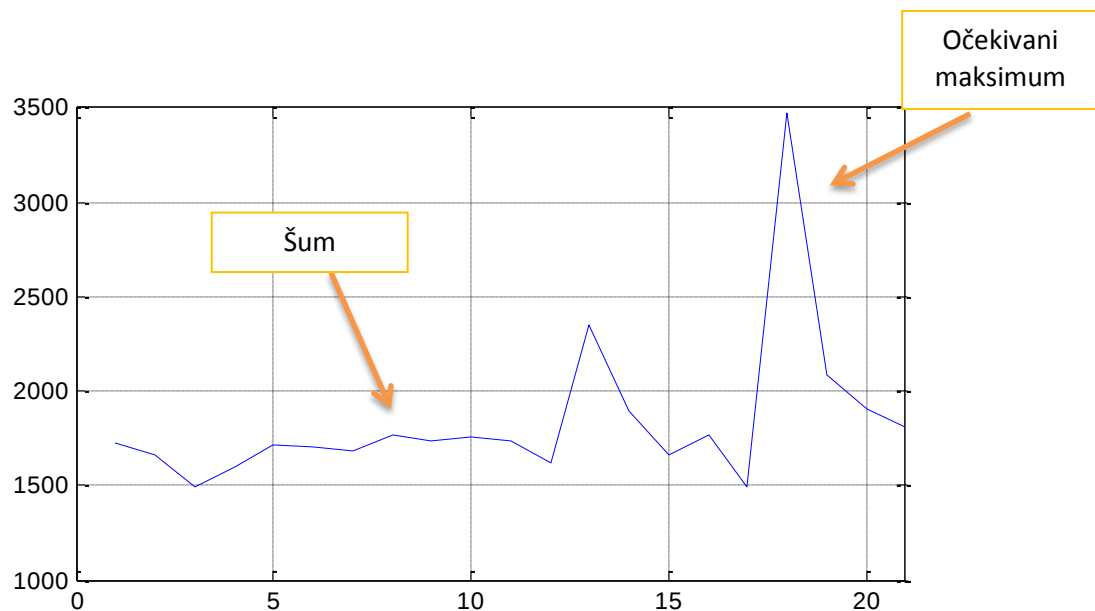
Šum koji nastaje usled kroskorelacije sa polinomijalnom komponentom je prevelik da bi se originalna komponenta signala rekonstruisala ovim algoritmom sa samo $N=32$, slučajno uzetih mjerenja.

Kada je u pitanju kvalitet rekonstrukcije polinomijalne komponente, korišćenjem OMP algoritma, u istim uslovima, CS rekonstrukcija je uspješna i algoritam pronalazi komponentu od

interesa na očekivanoj 17. poziciji. Na Slikama 24 i 25 su dati DFT rekonstrukcije i originala kada se parametri poklapaju/ne poklapaju kao i maksimum DFT-a rekonstruisanog signala na kojoj se vidi da je komponenta od interesa rekonstruisana i ima veću vrijednost od neželjenog šuma.



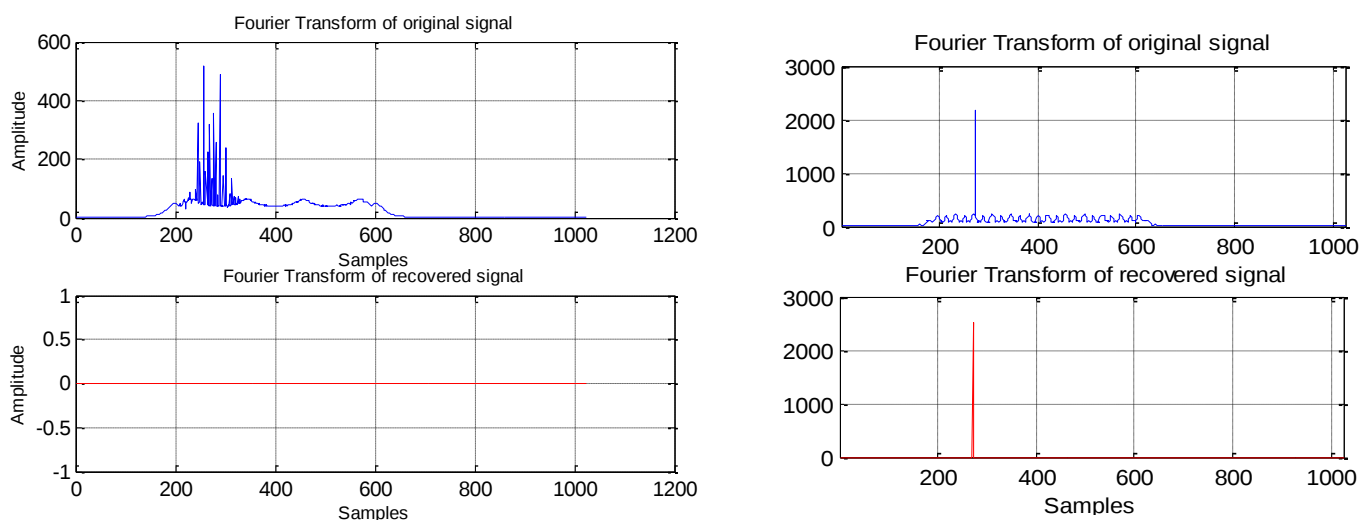
Slika 24: DFT originala i rekonstrukcije kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se poklapaju (desno) polinomijalna komponenta, $N=32$, OMP algoritam



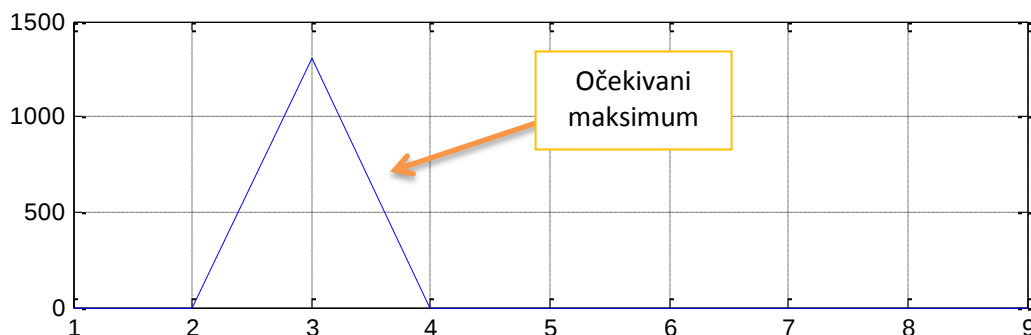
Slika 25: Maksimum DFT-a rekonstruisane polinomijalne komponente $N=32$, OMP algoritam

Posmatrajmo isti signal, podvrgnut CS rekonstrukciji, u istim uslovima uz upotrebu IPA algoritma. Za parametre su uzete iste vrijednosti i intervali pretrage $p=7$, $q=0.75$, $p:[-10,10]$, $q:[-0.25, 6.25]$. Broj odbiraka za rekonstrukciju je $N=32$.

Na Slikama 26 i 27 su prikazani DFT originala i rekonstrukcije kada se parametri poklapaju i kada se parametri ne poklapaju za kosinusnu komponentu, kao i maksimum DFT-a rekonstruisane komponente na kojoj je očekivani maksimum na 3. poziciji.



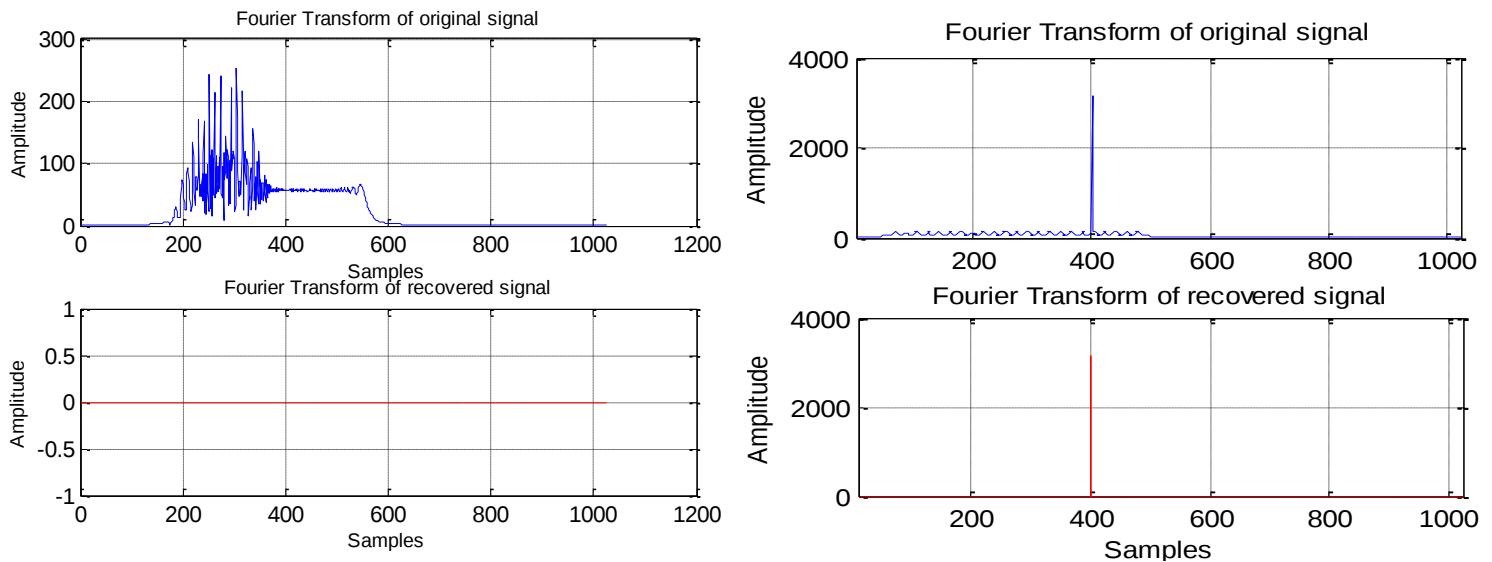
Slika 26: DFT originala i rekonstrukcije kosinusoidalne komponente kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se poklapaju (desno) $N=32$, IPA algoritam



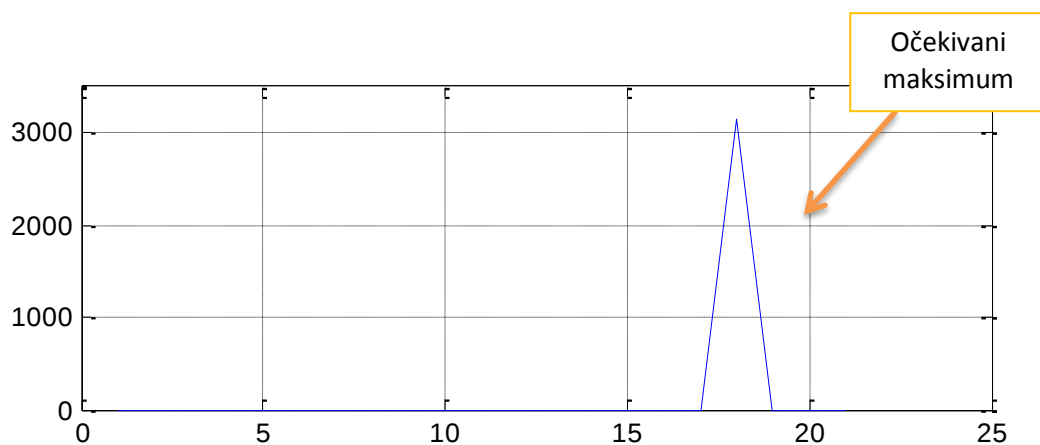
Slika 27: Maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente $N=32$, IPA algoritam

Algoritam je uspješno detektovao željenu komponentu na očekivanoj poziciji a zbog pragovanja je odbacio šum.

IPA algoritam uspješno detektuje i polinomijalnu komponentu signala, i očekivani maksimum na sedamnaestoj poziciji (Slike 28 i 29).

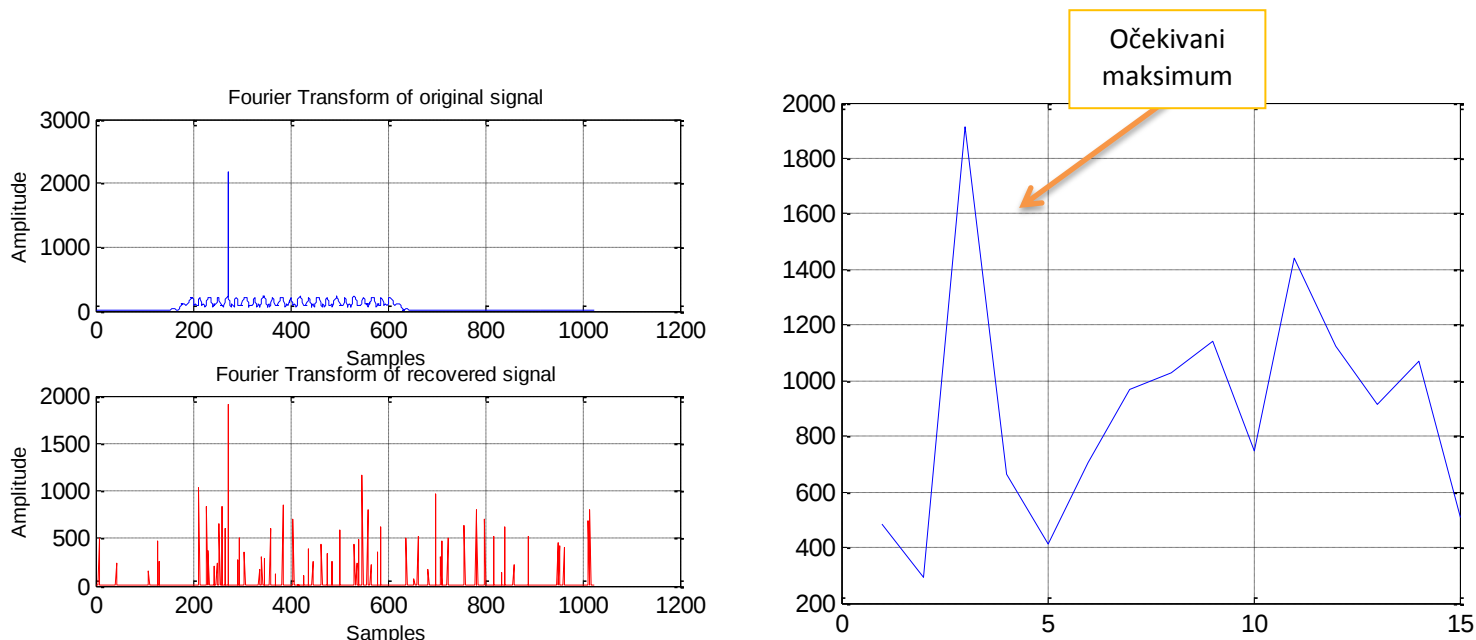


Slika 28: DFT originala i rekonstrukcije polinomijalne komponente kada se parametri ne poklapaju (lijevo) i kada se poklapaju (desno) $N=32$, IPA algoritam

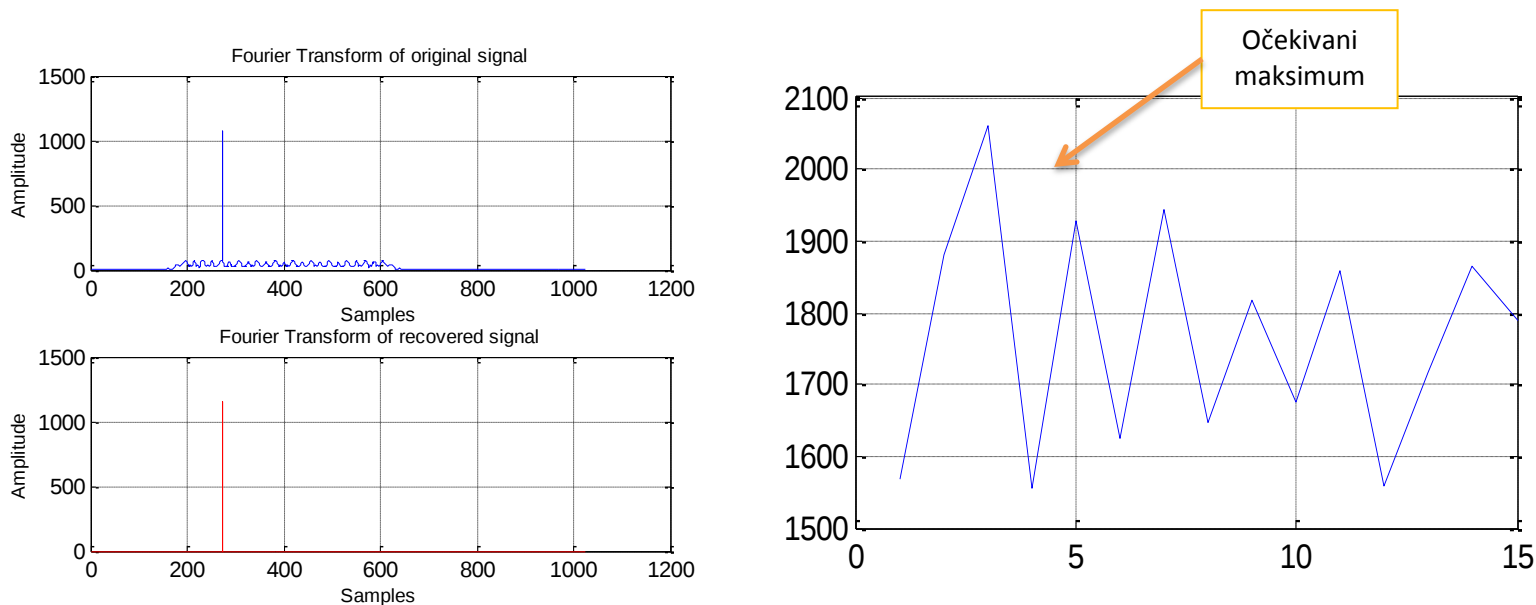


Slika 29: Maksimum DFT-a rekonstruisane polinomijalne komponente $N=32$, IPA algoritam

Ukoliko se broj mjerenja poveća na $N=64$ (6.25% od ukupne dužine signala), l1min i OMP algoritam uspješno rekonstruišu i kosinusnu komponentu signala (Slike 30 i 31). Maksimum DFT-a rekonstruisanog signala nadjačava šum i isplivava na očekivanoj, trećoj poziciji.

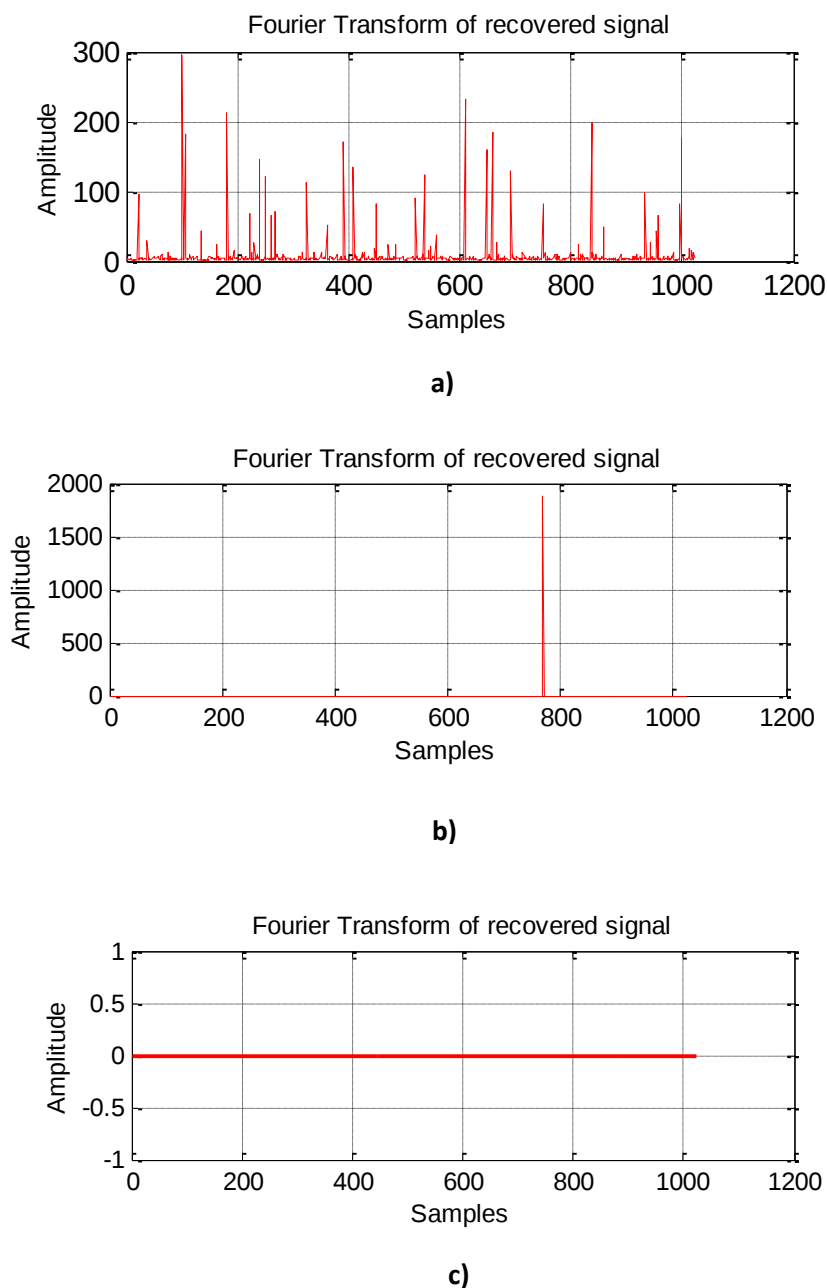


Slika 30: DFT originala i rekonstrukcije kosinusne komponente kada se parametri poklapaju (lijevo) , maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente $N=64$, l1 min algoritam



Slika 31: DFT originala i rekonstrukcije kosinusne komponente kada se parametri poklapaju (lijevo) , maksimum DFT-a rekonstruisane kosinusne komponente $N=64$, OMP algoritam

Ukoliko posmatramo DFT rekonstrukcije u iteracijama u kojima se parametri u signalu i demodulacionoj funkciji ne poklapaju, primjećuje se da $l1_{min}$ i OMP algoritam i u tim iteracijama detektuju dominantne komponente dok IPA algoritam odbacuje sve komponente čija je vrijednost ispod zadatog praga i ne detektuje nijednu komponentu od interesa (Slika 32).



Slika 32: DFT rekonstrukcije kada se parametri ne poklapaju a) $l1_{min}$ b) OMP algoritam c) IPA

Kao posljedica ovoga, DFT maksimuma rekonstruisanog signala korišćenjem IPA algoritma u svakoj iteraciji je nula osim u iteraciji kada se parametri poklope i kada je originalni signal spars, pa ovaj algoritam uspješno rekonstruiše opisani fazno modulisani signal, dok je za primjenu l1min i OMP algoritma potrebno uzeti više mjerenja ($N=64$) da bi obje komponente bile uspješno rekonstruisane (Tabela 1).

Algoritam						
Br.mjerenja	L_1 min		OMP		IPA	
	Čirp	Cos	Čirp	Cos	Čirp	Cos
N=32	✓	✗	✓	✗	✓	✓
N=64	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Tabela 1: Pregled uspješnosti rekonstrukcije polinomijalne i kosinusoidalne komponente u zavisnosti od broja mjerenja i korišćenog algoritma

6. Zaključak

Compressive Sensing je tehnika koja je našla veliku primjenu u oblasti obrade signala zbog toga što omogućava rekonstrukciju signala na osnovu jako malog broja odbiraka što je od velikog značaja za prenos signala. Da bi ovo bilo moguće, signal koji se prenosi mora da zadovoljava određene uslove od kojih je jedan uslov rijetkosti koji podrazumijeva da se signal prije primjene CS-a prebaci u transformacioni domen u kojem ima mali broj nenultih koeficijenata.

U radu je razmatrana primjena ove tehnike na signale sa polinomijalnom i sinusoidalnom faznom modulacijom. Ovakvi signali nisu rijetki ni u najčešće korišćenim transformacionim domenima pa je predložena procedura za njihovu demodulaciju u cilju obezbjeđivanja rijetkosti i primjene Compressive Sensing-a.

Najprije je dat pregled metoda komprimovanog odabiranja signala, kao i pregled i opis funkcionisanja algoritama koji se koriste za rekonstrukciju u tehnici CS-a. Nakon toga, definisana je procedura za demodulisanje signala sa nelinearnom faznom funkcijom, koja podrazumijeva određivanje parametara signala koji su osnova za njihovu rekonstrukciju u uslovima komprimovanog odabiranja.

Nakon primijenjene demodulacije signala, za rekonstrukciju su primijenjena tri različita algoritma: l1min algoritam koji se bazira na minimizaciji l1 norme vektora koji zadovoljavaju unaprijed zadate uslove, OMP algoritam koji pronalazi rješenje iterativnom procedurom kroz koju razlaže signal na funkcije koje formiraju rječnik i u svakoj iteraciji pronalazi onaj element rječnika koji najbolje aproksimira original i IPA algoritam zasnovan na upotrebi spektralnog praga čiji se izraz izvodi analizom uticaja nedostajućih odbiraka na pojavu spektralnog šuma.

Analizirani su rezultati dobijeni primjenom ovih algoritama na konkretne signale. Pokazano je da najbolje performanse pokazuje IPA algoritam koji uspješno rekonstruiše signal na osnovu malog broja odbiraka, dok su i preostala dva algoritma uspješna ali za veći broj uzetih mjerenja.

7. Prilog

U Prilogu je data realizacija nekih od najbitnijih algoritama korišćenih za izradu rada. Algoritmi su realizovani korišćenjem Matlab-a.

Demodulacija i rekonstrukcija signala sa sinusoidalnom faznom modulacijom korišćenjem IPA algoritma (Primjer 1):

```
close all;
clear all;
%length of the signal
N=1024;
M=32;
K=24;
t=-N/2:1:N/2-1/N;
t=t/N;
MAX=[];

for b=1:5

for a=-0.1:0.15:0.8

x=4*exp(-j*3*sin(0.35*M*2*pi*t/2)+j*t*M*2*pi)+2*exp(-
j*5*sin(0.05*M*2*pi*t/2)+j*t*M*5*2*pi); % dvije sin

%% x=1*exp(-j*4*sin(0.2*M*2*pi*t/2)+j*M*15*pi*t); %jedna sin

xx=x.*exp(j*b*sin(2*pi*a*M*t/2)); %demodulacija za dvije sin
%% xx=x.*exp(j*4*sin(2*pi*a*M*t/2)); %demodulacija za jednu sin

%%% Compressive Sensing %%%

B=dftmtx(N);
Binv=inv(B);
xf=B*xx';
xf=Binv*xx';
q=randperm(N);
qM=q(1:K);
Ax=Binv(q(1:K),:);
y=(Ax*xf);
y=y';
x0=Ax'*y';
xp=sra(y,qM,1024,K,0);

% rekonstrukcija signala

MAX=[MAX max(abs(xp))];
```

```

figure;
subplot(2,1,1)
plot(abs((xf)))
%plot(abs(fftshift(xf)))
grid on;
xlabel('Samples');
ylabel('Amplitude');
title('Fourier Transform of original signal');

subplot(2,1,2)
% plot(abs(fftshift(xp)), 'r')
plot(abs((fliplr(xp))), 'r')
grid on;
xlabel('Samples');
ylabel('Amplitude');
title(sprintf('Fourier Transform of recovered signal'));%pause
a
%b
%end
end

% % % rekonstrukcija amplituda signala %%
A=[exp(j*3*sin(0.35*M*2*pi*t/2)-j*t*M*2*pi);exp(j*5*sin(0.05*M*2*pi*t/2)-
j*t*M*5*2*pi)];
A=A.';
Acs=A(qM);
y=x(qM);
X1=pinv(Acs'*Acs)*(Acs'*y);
x1=X1(1)*exp(-j*3*sin(0.35*M*2*pi*t/2)+j*t*M*2*pi);
x2=X1(2)*exp(-j*5*sin(0.05*M*2*pi*t/2)+j*t*M*5*2*pi);

figure;
plot(MAX)
grid on;
title('Maximal values of DFT');

figure;
subplot(3,1,1)
plot(real(x))
grid on;
ylabel('Amplitude');
title('Original signal');

subplot(3,1,2)
plot(real(x1), 'r')
grid on;
ylabel('Amplitude');
title(sprintf('Reconstructed signal component'));%pause

subplot(3,1,3)
plot(real(x2), 'g')
grid on;
ylabel('Amplitude');
title(sprintf('Reconstructed signal for a=0.05 and b=5'));%pause

```

OMP Algoritam

```
function [out1, kk, Err, Tempout] = OMPfun1(x, iter, Psi) %%%x su mjerenja
if size(x,2) > 1
    x = x.';
end
%-- Inicijalizacija
L = size(Psi,2);
Err=x;
Dtemp=[];
Track = zeros(1,L);

for kk=1:iter
%    kk
    Projection = Err'*Psi;
    [va,pos]=max(abs(Projection));
    pos=pos(1);
    pos0(kk)=pos;
    Dtemp(:,kk)=Psi(:,pos);
    Tempout=(pinv(Dtemp))*x;
    Err=x-Dtemp*Tempout;
    Track(pos) = iter-kk+1;
end
sol = zeros(L,1);
sol(pos0) = Tempout;
out1 = sol;
```

L_1 min algoritam

```
function xp = lleq_pd(x0, A, At, b, pdtol, pdmaxiter, cgtol, cgmaxiter)

largescale = isa(A, 'function_handle');

if (nargin < 5), pdtol = 1e-3; end
if (nargin < 6), pdmaxiter = 150; end
if (nargin < 7), cgtol = 1e-8; end
if (nargin < 8), cgmaxiter = 200; end

N = length(x0);

alpha = 0.01;
beta = 0.5;
mu = 10;

gradf0 = [zeros(N,1); ones(N,1)];

% starting point --- make sure that it is feasible
if (largescale)
    if (norm(A(x0)-b)/norm(b) > cgtol)
        disp('Starting point infeasible; using x0 = At*inv(AAt)*y.');
```

```

    AAt = @(z) A(At(z));
    [w, cgres, cgiter] = cgsolve(AAt, b, cgtol, cgmaxiter, 0);
    if (cgres > 1/2)
        disp('A*At is ill-conditioned: cannot find starting point');
        xp = x0;
        return;
    end
    x0 = At(w);
end
else
    if (norm(A*x0-b)/norm(b) > cgtol)
        disp('Starting point infeasible; using x0 = At*inv(AAt)*y. ');
        opts.POSDEF = true; opts.SYM = true;
    %    [w, hcond] = linsolve(A*A', b, opts);
    [w, hcond] = linsolve(A*A', b);
    if (hcond < 1e-14)
        disp('A*At is ill-conditioned: cannot find starting point');
        xp = x0;
        return;
    end
    x0 = A'*w;
end
end
x = x0;
u = (0.95)*abs(x0) + (0.10)*max(abs(x0));

% set up for the first iteration
fu1 = x - u;
fu2 = -x - u;
lamu1 = -1./fu1;
lamu2 = -1./fu2;
if (largescale)
    v = -A(lamu1-lamu2);
    Atv = At(v);
    rpri = A(x) - b;
else
    v = -A*(lamu1-lamu2);
    Atv = A'*v;
    rpri = A*x - b;
end

sdg = -(fu1'*lamu1 + fu2'*lamu2);
tau = mu*2*N/sdg;

rcent = [-lamu1.*fu1; -lamu2.*fu2] - (1/tau);
rdual = gradf0 + [lamu1-lamu2; -lamu1-lamu2] + [Atv; zeros(N,1)];
resnorm = norm([rdual; rcent; rpri]);

pditer = 0;
done = (sdg < pdtol) | (pditer >= pdmaxiter);
while (~done)

    pditer = pditer + 1;

    w1 = -1/tau*(-1./fu1 + 1./fu2) - Atv;
    w2 = -1 - 1/tau*(1./fu1 + 1./fu2);

```

```

w3 = -rpri;

sig1 = -lamu1./fu1 - lamu2./fu2;
sig2 = lamu1./fu1 - lamu2./fu2;
sigx = sig1 - sig2.^2./sig1;

if (largescale)
    wlp = w3 - A(w1./sigx - w2.*sig2./(sigx.*sig1));
    hllpfun = @(z) -A(1./sigx.*At(z));
    [dv, cgres, cgiter] = cgsolve(hllpfun, wlp, cgtol, cgmaxiter, 0);
    if (cgres > 1/2)
        disp('Cannot solve system. Returning previous iterate.');
```

```

        xp = x;
        return
    end
    dx = (w1 - w2.*sig2./sig1 - At(dv))./sigx;
    Adx = A(dx);
    Atdv = At(dv);
else
    wlp = -(w3 - A*(w1./sigx - w2.*sig2./(sigx.*sig1)));
    H11p = A*(sparse(diag(1./sigx))*A');
    opts.POSDEF = true; opts.SYM = true;
%    [dv,hcond] = linsolve(H11p, wlp, opts);
    [dv,hcond] = linsolve(H11p, wlp);

    if (hcond < 1e-14)
        disp('Matrix ill-conditioned. Returning previous iterate.');
```

```

        xp = x;
        return
    end
    dx = (w1 - w2.*sig2./sig1 - A'*dv)./sigx;
    Adx = A*dx;
    Atdv = A'*dv;
end

du = (w2 - sig2.*dx)./sig1;

dlamu1 = (lamu1./fu1).*(-dx+du) - lamu1 - (1/tau)*1./fu1;
dlamu2 = (lamu2./fu2).*(dx+du) - lamu2 - 1/tau*1./fu2;

% make sure that the step is feasible: keeps lamu1, lamu2 > 0, fu1, fu2 < 0
indp = find(dlamu1 < 0); indn = find(dlamu2 < 0);
s = min([1; -lamu1(indp)./dlamu1(indp); -lamu2(indn)./dlamu2(indn)]);
indp = find((dx-du) > 0); indn = find((-dx-du) > 0);
s = (0.99)*min([s; -fu1(indp)./(dx(indp)-du(indp)); -fu2(indn)./(-dx(indn)-du(indn))]);

% backtracking line search
suffdec = 0;
backiter = 0;
while (~suffdec)
    xp = x + s*dx; up = u + s*du;
    vp = v + s*dv; Atvp = Atv + s*Atdv;
    lamu1p = lamu1 + s*dlamu1; lamu2p = lamu2 + s*dlamu2;
    fulp = xp - up; fu2p = -xp - up;
end

```

```

    rdp = gradf0 + [lamu1p-lamu2p; -lamu1p-lamu2p] + [Atvp; zeros(N,1)];
    rcp = [-lamu1p.*fulp; -lamu2p.*fu2p] - (1/tau);
    rpp = rpri + s*Adx;
    suffdec = (norm([rdp; rcp; rpp]) <= (1-alpha*s)*resnorm);
    s = beta*s;
    backiter = backiter + 1;
    if (backiter > 32)
%       disp('Stuck backtracking, returning last iterate.')
        xp = x;
        return
    end
end

% next iteration
x = xp;  u = up;
v = vp;  Atv = Atvp;
lamu1 = lamu1p;  lamu2 = lamu2p;
ful = fulp;  fu2 = fu2p;

% surrogate duality gap
sdg = -(ful'*lamu1 + fu2'*lamu2);
tau = mu*2*N/sdg;
rpri = rpp;
rcent = [-lamu1.*ful; -lamu2.*fu2] - (1/tau);
rdual = gradf0 + [lamu1-lamu2; -lamu1-lamu2] + [Atv; zeros(N,1)];
resnorm = norm([rdual; rcent; rpri]);

done = (sdg < pdtol) | (pditer >= pdmaxiter);

end

```

8. Literatura

- [1] J. A. Tropp, et al., "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 53, pp. 4655-4666, April 2007.
- [2] I. Orovic, S. Stankovic, T. Thayaparan, LJ. Stankovic, "Multiwindow S-method for Instantaneous Frequency Estimation and its Application in Radar Signal Analysis," IET Sig. Proc, vol. 4, no. 4, pp. 363-370, 2010
- [3] T. Blumensath, et al., "On the difference between orthogonal matching pursuit and orthogonal least squares," Tech. Rep., Univ. of Edinburgh, Mar. 2007
- [4] S. Stankovic, LJ. Stankovic, I. Orovic, "Relationship between the Robust Statistics Theory and Sparse Compressive Sensed Signals Reconstruction," IET Signal Processing, vol. 8, no. 3, pp. 223-229, 2014
- [5] R. DeVore and V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Adv. Comput. Math., vol. 5, pp.173 -187, 1996
- [6] S. Stankovic, I. Orovic, M. Amin, "L-statistics based Modification of Reconstruction Algorithms for Compressive Sensing in the Presence of Impulse Noise," Signal Processing, vol.93, no.11, pp. 2927-2931, 2013
- [7] E. J. Candès, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information.", IEEE Trans. Inf. Theory
- [8] S. Stankovic, I. Orovic, LJ. Stankovic, "An Automated Signal Reconstruction Method based on Analysis of Compressive Sensed Signals in Noisy Environment," Sig. Proc., vol. 104, pp. 43 - 50, 2014
- [9] D. L. Donoho, M. Elad, and V. Temlyakov, "Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise", IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 52, no. 1, pp.6 -18, 2006
- [10] S. Stankovic, I. Orovic, LJ. Stankovic, A. Draganic, "Single-Iteration Algorithm for Compressive Sensing Reconstruction," Telfor Journal, Vol. 6, No. 1, pp. 36-41, 2014
- [11] J. A. Tropp, "Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation", IEEE Trans Inf. Theory, vol. 50, no. 10, pp.2231 -2242, 2004
- [12] S. Stankovic, I. Orovic, T. Pejakovic, M. Orovic, "Compressive sensing reconstruction of signals with sinusoidal phase modulation: application to radar micro-Doppler," 22nd Telecommunications Forum, 2014
- [13] S. G. Mallat, Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, no. 12, pp. 3397-3415. Dec. 1993.
- [14] L. Stankovic, I. Orovic, S. Stankovic, M. Amin, "Robust Time- Frequency Analysis based on the L-estimation and Compressive Sensing", IEEE Sig. Proc. Lett, vol.20, No.5, pp.499-502, 2013.

- [15] Y. Tsaig and D. L. Donoho, "Extensions of compressed sensing," *Signal Processing*, vol. 86, pp. 533-548, Jul. 2006.
- [16] L. Stankovic, I. Orovic, S. Stankovic, M. Amin, "Compressive Sensing Based Separation of Non-Stationary and Stationary Signals Overlapping in Time-Frequency," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, no. 18, pp. 4562-4572, Sept. 2013
- [17] D. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE. Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, Apr. 2006.
- [18] I. Orović, S. Stanković, and T. Thayaparan, "Time-Frequency Based Instantaneous Frequency Estimation of Sparse Signals from an Incomplete Set of Samples," *IET Signal Processing, Special issue on Compressive Sensing and Robust Transforms*, vol. 8, no. 3, pp. 239 – 245, May 2014
- [19] S. G. Mallat, Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397-3415. Dec. 1993.
- [20] Y. Tsaig and D. L. Donoho, "Extensions of compressed sensing," *Signal Processing*, vol. 86, pp. 533-548, Jul. 2006.
- [21] S. Stankovic, I. Orovic, E. Sejdic, *Multimedia Signals and Systems*, Springer, 2012.
- [22] E. Candes and J. Romberg, "Sparsity and incoherence in compressive sampling", *Inverse Prob.*, vol. 23, no. 3, pp.969 -985, 2007
- [23] Lj. Stankovic, M. Dakovic, S. Stankovic, I. Orovic, "Sparse Signal Processing," in the Book: *Digital Signal Processing*, L. Stankovic, CreateSpace, Amazon, 2015, 2015
- [24] D. L. Donoho and P. B. Stark, "Uncertainty principles and signal recovery", *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 49, no. 3, pp.906 -931, 1989
- [25] J. Haupt and R. Nowak, "Signal reconstruction from noisy random projections", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 9, pp.4036 -4048, 2006
- [26] S. Stankovic, I. Orovic, E. Sejdic, "Multimedia Signals and Systems: Basic and Advance Algorithms for Signal Processing," Springer-Verlag, New York, 2015
- [27] M. L. Malloy and R. D. Nowak, "Near-optimal adaptive compressed sensing", *Proc. Conf. Rec. 46th Asilomar Signals, Syst. and Comput.*, pp.1124 -1130, 2012
- [28] M. Iwen and A. Tewfik, "Adaptive compressed sensing for sparse signals in noise", *Proc. Conf. Rec. 45th Asilomar Conf. Signals, Syst. and Comput.*, pp.1240 -1244, 2011
- [29] S. Stankovic, I. Orovic, E. Sejdic, "Multimedia Signals and Systems," Springer-Verlag, New York, 2012
- [30] E. Arias-Castro, "Detecting a vector based on linear measurements", *Electron. J. Statist.*, vol. 6, pp.547 -558, 2012
- [31] D. Needell, R. Vershynin, "Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit," *Foundations of Computational Mathematics*, vol.9, pp.317-334, 2009.
- [32] Lj. Stankovic, S. Stankovic, M. Amin, "Missing Samples Analysis in Signals for Applications to L-estimation and Compressive Sensing," *Signal Processing*, vol. 94, Jan 2014, pp. 401-408, 2014

- [33] D. Needell, J. Tropp, "CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 26, no. 3, pp. 301-321, 2009.
- [34] E. J. Candes, "The restricted isometry property and its implications for compressed sensing", *Comptes Rendus Mathematique*, vol. 346, no. 9-10, pp. 589-592, 2008
- [35] S. Stankovic, S. Krishnan, B. Mobasser, Y. Zhang, "Time-Frequency Analysis and Its Applications to Multimedia Signals - Editorial," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Special issue on Time-Frequency Analysis and Its Applications to Multimedia Signals, Vol. 2010, Article ID 739017, Pages 3, 2010
- [36] T. Cai, L. Wang and G. Xu, "Shifting inequality and recovery of sparse signals", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 3, pp. 1300-1308, 2010
- [37] W. Dai and O. Milenkovic, "Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 55, no. 5, pp. 2230-2249, 2009
- [38] A. Draganic, I. Orovic, S. Stankovic, "Compressive Sensing Least Square problem solution suitable for implementation," *23rd Telecommunications Forum, TELFOR 2015*, 2015
- [39] D. Needell and R. Vershynin, "Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit", *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, vol. 4, no. 2, pp. 310-316, 2010
- [40] S. Foucart, "Hard thresholding pursuit: An algorithm for compressive sensing", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 49, no. 6, pp. 2543-2563, 2011
- [41] I. Orovic, T. Pejakovic, M. Orovic, "A comparison of CS Reconstruction Algorithms for Multicomponent Nonlinear Phase Signals," *4th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO*, 2015
- [42] M. Yang and F. de Hoog, "New coherence and RIP analysis for weak orthogonal matching pursuit", *Proc. IEEE Workshop Statist. Signal Process. (SSP)*, pp. 376-379
- [43] M. Davenport and M. Wakin, "Analysis of orthogonal matching pursuit using the restricted isometry property", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 56, no. 9, pp. 4395-4401, 2010
- [44] I. Orovic, S. Stankovic, L.J. Stankovic, "Compressive Sensing Based Separation of LFM Signals," *56th International Symposium ELMAR 2014, Zadar, Croatia*, 2014
- [45] E. Liu and V. Temlyakov, "The orthogonal super greedy algorithm and applications in compressed sensing", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 58, no. 4, pp. 2040-2047, 2012
- [46] T. Zhang, "Sparse recovery with orthogonal matching pursuit under RIP", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 9, pp. 6215-6221, 2011
- [47] A. Draganic, I. Orovic, N. Lekic, M. Dakovic, S. Stankovic, "Architecture for Single Iteration Reconstruction Algorithm," *4th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2015*, 2015
- [48] V. Temlyakov, "Relaxation in greedy approximation", *Construct. Approx.*, vol. 28, no. 1, pp. 1-25, 2008

- [49] D. Donoho, "For most large underdetermined systems of linear equations the minimal ℓ_1 -norm solution is also the sparsest solution," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 59, no. 6, pp. 797-829, 2006.
- [50] M. A. Davenport, M. F. Duarte, Y. C. Eldar, and G. Kutyniok, "Introduction to compressed sensing," in *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Y. C. Eldar and G. Kutyniok, Eds. Cambridge University Press, 2012, pp. 1-68.
- [51] R. Mihajlovic, M. Scekic, A. Draganic, S. Stankovic, "An Analysis of CS Algorithms Efficiency for Sparse Communication Signals Reconstruction," *3rd Mediterranean Conference on Embedded Computing*, MECO, 2014
- [52] M. Martorella: "Novel approach for ISAR image cross-range scaling," *IEEE Trans. on Aerospace and Electr. Systems*, vol. 44, no. 1, pp. 281-294, 2008
- [53] M. Kojima, N. Megiddo, and S. Mizuno, Theoretical convergence of large-step primal-dual interior point algorithms for linear programming, *Mathematical Programming*, 59 (1993), pp. 1–21.
- [54] M. Medenica, S. Zukovic, A. Draganic, I. Orovic, S. Stankovic, "Comparison of the algorithms for CS image reconstruction," *Informacione tehnologije IT 2014*, Zabljak, 2014
- [55] M. Kojima, N. Megiddo, and S. Mizuno, Theoretical convergence of large-step primal-dual interior point algorithms for linear programming, *Mathematical Programming*, 59 (1993), pp. 1–21.
- [56] E. Candes, J. Romberg, "l₁-magic: Recovery of Sparse Signals via Convex Programming" Caltech, 2005
- [57] S. Stankovic, I. Orovic, Lj. Stankovic, "Single-Iteration Algorithm for Compressive Sensing Reconstruction," *21st Telecommunications Forum TELFOR 2013*, Novembar, 2013
- [58] T. Blumensath, M. E. Davies, "Gradient Pursuits," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.56, no.6, pp. 2370-2382, June 2008.
- [59] S. Stankovic, I. Orovic, "An Ideal OMP based Complex-Time Distribution," *2nd Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO - 2013*, pp. 109-112, June 2013, Budva, Montenegro, 2013
- [60] M. A. Davenport, M. B. Wakin, "Analysis of Orthogonal Matching Pursuit Using the Restricted Isometry Property," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.56, no.9, pp. 4395-4401, Sept. 2010.
- [61] S. Stankovic, Lj. Stankovic, I. Orovic, "L-statistics combined with compressive sensing," *SPIE Defense, Security and Sensing*, Baltimore, Maryland, United States, 2013
- [62] R. Monteiro and I. Adler, "Interior path following primal-dual algorithms. Part I: Linear programming," *Mathematical Programming*, 44 (1989), pp. 27–41
- [63] Lj. Stankovic, S. Stankovic, I. Orovic, Y. Zhang, "Time-Frequency Analysis of Micro-Doppler Signals Based on Compressive Sensing," *Compressive Sensing for Urban Radar*, Ed. M. Amin, CRC-Press, 2014
- [64] S. J. Wright, "Implementing proximal point methods for linear programming," *Journal of Optimization Theory and Applications* 65.3 (1990): 531-554.

- [65] G. Davis, S. Mallat, and M. Avellaneda, "Greedy adaptive approximation," *Constructive Approximation*, 1997, 12, pp. 57–98
- [66] V. C. Chen: "Micro-Doppler effect in radar: Part I: Phenomenon, physics, mathematics, and simulation study," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 42, no. 1, 2006, pp.2-21.
- [67] A. Draganic, I. Orovic, S. Stankovic, "Blind Signals Separation in wireless communications based on Compressive Sensing," *22nd Telecommunications Forum , TELFOR*, 2014
- [68] M. Elad, "Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing", Springer 2010.
- [69] S. Boyd, L. Vandenberghe, "Convex Optimization", Cambridge University Press, 2004.
- [70] M. Dakovic, LJ. Stankovic, I. Orovic, "Adaptive Gradient Based Algorithm for Complex Sparse Signal Reconstruction,"*22nd Telecommunications Forum TELFOR 2014, Belgrade, Serbia, 2014*
- [71] Rauhut H, Schnass K, Vandergheynast P. "Compressed sensing and redundant dictionaries" [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54 (5): 2210-2219.
- [72] D L Donoho, I Drori, Y T saig, J L Starck. "Sparse Solution of Underdetermined Linear Equations by Stagewise Orthogonal Matching Pursuit" [R]. Stanford University, 2006.
- [73] S. Vujovic, M. Dakovic, I. Orovic, S. Stankovic, "An Architecture for Hardware Realization of Compressive Sensing Gradient Algorithm," *4th Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO - 2015, Budva, Montenegro, 2015*
- [74] Tropp J.A., Laska J.N., Duarte M.F., Romberg J.K., Baraniuk R.G., Beyond Nyquist: Efficient Sampling of Sparse Bandlimited Signals, *Information Theory, IEEE Transactions*, 56(1), 520-544, Jan. 2010.
- [75] A. Draganic, M. Brajovic, I. Orovic, S. Stankovic, "A Software Tool for Compressive Sensing based Time-Frequency Analysis," *57th International Symposium , ELMAR-2015, Zadar, Croatia, 2015*
- [76] Guoxian Huang and Lei Wang , "Soft-thresholding orthogonal matching pursuit for efficient signal reconstruction" , *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2013 IEEE International Conference on* , pp.2543 -2547
- [77] Bai Lin, P. Maechler, M. Muehlberghuber and H. Kaeslin , "High-speed compressed sensing reconstruction on fpga using omp and amp" , *Electronics, Circuits and Systems (ICECS), 2012 19th IEEE International Conference on* , pp.53 -56
- [78] LJ. Stankovic, I. Orovic, S. Stankovic, "Compressive sensing approach in the Hermite transform domain," submitted to, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015
- [79] J. L. Paredes and G. R. Arce , "Compressive sensing signal reconstruction by weighted median regression estimates" , *IEEE Trans. on Signal Processing* , vol. 59 , no. 6 , pp.2585 -2601 , 2011
- [80] V K Goyal, A K Fletcher, S Rangan. "Compressive sampling and lossy compression" [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25 (2): 48-56.

- [81] I. Orovic, A. Draganic, S. Stankovic, "Sparse Time-Frequency Representation for Signals with Fast Varying Instantaneous Frequency," IET Radar, Sonar & Navigation, Online ISSN 1751-8792, Available online: 20 August, 2015
- [82] Daubechies, I., Defrise, M., De Mol, C., An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J], Comm. Pure Appl. Math., vol. 57, pp. 1413-1457, 2004. (Pubitemid 39427442)
- [83] Y. Tsaig, D. Donoho, Extensions of compressed sensing, Signal Processing, 86(2006): 549-571, 2005.
- [84] M. Brajovic, I. Orovic, M. Dakovic, S. Stankovic, "Gradient-based signal reconstruction algorithm in the Hermite transform domain," Electronic Letters, 2015
- [85] D. Donoho, For most large underdetermined systems of linear equations, the minimal L1 norm solution is also the sparsest solution, Communications on Pure and Applied Mathematics, 59(6): 797-829, 2006.
- [86] I. Orovic, S. Park, S. Stankovic, "Compressive sensing in Video applications," 21st Telecommunications Forum TELFOR 2013, Novembar, 2013
- [87] Fornasier M, Rauhut H (2011) Compressive sensing. (Chapter in Part 2 of the Handbook of Mathematical Methods in Imaging (O. Scherzer Ed.). Springer
- [88] Foucart S, Rauhut H (2013) A Mathematical Introduction to Compressive sensing. Springer
- [89] I. Orovic, S. Stankovic, B. Jokanovic, A. Draganic, "On Compressive Sensing in Audio Signals," ETRAN 2012, Zlatibor, 2012
- [90] P. Boyd, and L. Vandenberghe, Convex Optimization. Cambridge University Press, March 8, 2004 - Business & Economics - 716 pages.
- [91] L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms", Physica D, 60:259-268, 1992
- [92] S. Stankovic, I. Orovic, M. Amin, "Compressed Sensing Based Robust Time-Frequency Representation for Signals in Heavy-Tailed Noise," Information Sciences, Signal Processing and their Applications, ISSPA 2012, Canada, 2012
- [93] A.C. Gurbuz, J.H. McClellan, W. R. Scott, "A Compressive Sensing Data Acquisition and Imaging Method for Stepped Frequency GPRs," IEEE Trans. Geosc. and Rem. Sens. vol. 57. no. 7, 2009, pp. 2640–2650
- [94] E.Sejdic, A. Cam, L.F. Chaparro, C.M. Steele, T. Chau, "Compressive sampling of swallowing accelerometry signals using time-frequency dictionaries based on modulated discrete prolate spheroidal sequences", EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2012:101
- [95] A. Draganic, I. Orovic, S. Stankovic, M. Amin, "Rekonstrukcija FHSS signala zasnovana na principu kompresivnog odabiranja," TELFOR 2012, Beograd, 2012
- [96] Peyré G (2010) Best basis compressed sensing. IEEE Transactions on Signal Processing, 58(5): 2613-2622
- [97] Flandrin P, P. Borgnat P (2010) Time-Frequency Energy Distributions Meet Compressed Sensing. IEEE Transactions on Signal Processing, 8(6): 2974-2982

- [98] B. Jokanovic, M. Amin, S. Stankovic, "Instantaneous frequency and time-frequency signature estimation using compressive sensing," SPIE Defense, Security and Sensing, Baltimore, Maryland, United States, 2013
- [99] Duarte M, Wakin M, Baraniuk R (2005) Fast reconstruction of piecewise smooth signals from random projections. SPARS Workshop
- [100] Donoho DL, Tsaig Y, Drori I, Starck JL (2007) Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit. IEEE Transaction on Information Theory, 58(2): 1094-1121
- [101] I. Orovic, S. Stankovic, M. Amin, "Compressive Sensing for Sparse Time-Frequency Representation of Nonstationary Signals in the Presence of Impulsive Noise," SPIE Defense, Security and Sensing, Baltimore, Maryland, United States, 2013
- [102] Saab R, Chartrand R, Yilmaz Ö (2008) Stable sparse approximation via nonconvex optimization. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)
- [103] Chartrand R (2007) Exact reconstructions of sparse signals via nonconvex minimization. IEEE Signal Processing Letters, 14(10): 707-710
- [104] R. G. Baraniuk, "Compressive sensing", IEEE Signal Processing Magazine, pp.118 -120, 2007
- [105] Gunawan, T.S.; Khalifa, O.O.; Shafie, A.A.; Ambikairajah, E.;, "Speech compression using compressive sensing on a multicore system," Mechatronics (ICOM), 2011 4th International Conference On, vol., no., pp.1-4, 17-19 May 2011
- [106] Christensen, M.G.; stergaard, J.; Jensen, S.H.;, "On compressed sensing and its application to speech and audio signals," Signals, Systems and Computers, 2009 Conference Record of the Forty-Third Asilomar Conference on, vol., no., pp.356-360, 1-4 Nov. 2009
- [107] Rauhut, H.; Schnass, K.; Vandergheynst, P.;, "Compressed Sensing and Redundant Dictionaries," Information Theory, IEEE Transactions on, vol.54, no.5, pp.2210-2219, May 2008
- [108] J. F. Gemmeke and B. Cranen, "Noise reduction through compressed sensing," in Proceedings of Interspeech, Brisbane, Australia, pp. 1785-1788, 2008.
- [109] A. Cohen, W. Dahmen, and R. A. DeVore, "Compressed sensing and best k-term approximation", J. Amer. Math. Soc., 22(1):211-231, 2009.
- [110] T. V. Sreenivas and W. B. Kleijn, "Compressive sensing for sparsely excited speech signals," in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, 2009, pp. 4125-4128.
- [111] R. Robucci, L. K. Chiu, J. Gray, J. Romberg, P. Hasler and D. Anderson, "Compressive sensing on a CMOS separabletransform image sensor", IEEE Int. Conf. Acoust.,Speech Signal Process., pp.5125 - 5128, 2008
- [112] L. W. Kang and C. S. Lu, "Distributed compressive video sensing", IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process., pp.1169 -1172, 2009

- [113] J. Zheng and E. L. Jacobs , "Video compressive sensing usingspatial domain sparsity" , Opt. Eng. , vol. 48 , no. 8 , pp.087006 , 2009
- [114] U. Gamper , P. Boesiger and S. Kozerke , "Compressed sensing in dynamic MRI" , Magn. Reson. Med. , vol. 59 , no. 2 , pp.365 -373 , 2008
- [115] L. Gan, "Block compressed sensing of natural images, " In Proceedings of the 15th International Conference on Digital Signal Processing, Washington D.C., USA, pp.403-406, Jul. 2007.
- [116] J. E. Fowler, Sungkwang Mun and Eric W. Tramel, "Multiscale Block Compressed Sensing with Smoothed Projected Landweber Reconstruction, " In proceedings of 19th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Aug 29-Sep 2, 2011.
- [117] Pudlewski, S., Prasanna, A. and Mwlodia, T., "Compressed Sensing Enabled Video Streaming for Wireless Multimedia Sensor Networks, " Mobile Computing, IEEE Trans., vol.11, pp.1060-1072, 2012.
- [118] Chakraborty, S., Zahedi, S., Younghun Kim, Srivastava, M.B., "Compressive Oversampling for Robust Data Transmission in Sensor Networks, "INFOCOM, 2010 Proceedings IEEE, pp.1-9, March 2010.
- [119] V. Stankovic, L. Stankovic, and S. Cheng, "Compressive video sampling, " in Proc. EUSIPCO, Aug. 2008
- [120] N. Jacobs, S. Schuh, and R. Pless, "Compressive sensing and differential image-motion estimation," in AcousticsSpeech and Signal Processing (ICASSP), 2010 IEEE International Conference on. IEEE, 2010, pp. 718-721.