



**UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET
PODGORICA**

Miloš Orović

**DIGITALNI WATERMARKING U USLOVIMA
KOMPRIMOVANOG OČITAVANJA PODATAKA**

- Magistarski rad -

Podgorica, Januar 2016.

PODACI I INFORMACIJE O MAGISTRANDU:

Ime i prezime: Miloš Orović

Datum rođenja: 24.04.1990. godine u Podgorici

Naziv završenog osnovnog studijskog programa: Elektronika, Telekomunikacije i Računari

Naziv završenog specijalističkog studijskog programa: Elektronika, Telekomunikacije i Računari, smjer Računari

INFORMACIJE O MAGISTARSKOM RADU

Naziv postdiplomskih studija: Elektronika, Telekomunikacije i Računari, smjer Računari, modul Multimedijalni signali i sistemi

Naslov rada: „DIGITALNI WATERMARKING U USLOVIMA KOMPRIMOVANOG OČITAVANJA PODATAKA“

Fakultet: Elektrotehnički fakultet Podgorica

UDK, OCJENA I ODBRANA MAGISTARSKOG RADA

Datum prijave magistarskog rada: 03.04.2015. godine

Datum sjednice Vijeća na kojoj je prihvaćena tema: 29.10.2015. godine

Komisija za ocjenu teme i podobnosti magistranda:

- Prof. dr Srdjan Stanković,
- Prof. dr Miloš Daković,
- Prof. dr Budimir Lutovac

Mentor: Prof. dr Srdjan Stanković

Komisija za ocjenu rada:

- Prof. dr Srdjan Stanković,
- Prof. dr Miloš Daković,
- Prof. dr Budimir Lutovac

Komisija za odbranu rada:

- Prof. dr Srdjan Stanković,
- Prof. dr Miloš Daković,
- Prof. dr Budimir Lutovac

Datum odbrane: 25.01.2016. godine

Datum promocije: _____

Sažetak

Kompresivno očitavanje i rekonstrukcija signala na osnovu malog broja slučajno odabranih mjerenja signala uveliko dobija na značaju i primjeni u mnogim realnim aplikacijama. Ova oblast otvara mogućnost za drastično smanjenje resursa prilikom akvizicije, smještanja i prenosa podataka, obezbjeđujući perfektu rekonstrukciju kompletnog signala za potrebe kasnijeg prikazivanja i korišćenja. Pri tome se za rekonstrukciju kompletne informacije koriste veoma moćni matematički algoritmi zasnovani na rješavanju optimizacionih problema. Ovo posebno važi za algoritme za rekonstrukciju slika koje su po svojoj prirodi znatno kompleksnije i zahtjevnije u odnosu na jednodimenzionalne signale. U novonastalim okolnostima, uređaji za snimanje prikupljaju samo mali procenat slučajnih piksela slike (ili signala uopšte), a u skladu sa time značajno se mijenjaju pristupi obradi podataka koji nisu cjeloviti. U prvom redu, postavlja se pitanje da li se nakon akvizicije određenog broja mjerenja slike, ista može zaštititi primjenom watermarking procedura i da li će kasnija rekonstrukcija uticati na detektibilnost watermarka. Drugim riječima, imajući u vidu da je zaštita digitalnih podataka od izuzetne važnosti u savremenom digitalnom dobu, neophodno je analizirati uspjehnost watermarkinga u scenariju kompresivnog očitavanja i rekonstrukcije. S tim u vezi, u ovom radu predložene su i analizirane watermarking procedure za zaštitu digitalne slike, uključujući i specijalnu proceduru za watermarking biomedicinskih slika. Analiziran je uticaj rekonstrukcionih algoritama na mogućnost detekcije i ekstrakcije watermarka u štićenom sadržaju u zavisnosti od broja dostupnih mjerenja signala i izvedeni su zaključci za svaki od razmatranih slučajeva.

Abstract

Compressive sensing and signal reconstruction based on a small set of random acquired measurements has a great gain in importance and application in real-world systems. This area raises the possibility of drastically reducing resources during the signal acquisition, storing and transmission, providing perfect reconstruction of a complete signal for the purposes of subsequent presentation and use. In doing so, the reconstruction of the complete information (signal representation) is achieved using very powerful mathematical algorithms based on the certain complex optimization problem solution. This particularly stands for the algorithms for image reconstruction which are, by their nature, much more complex and demanding compared to the one-dimensional signals. In the new circumstances, the acquisition devices collect just a small amount of random image pixels (or signal in general), and accordingly, the data processing approaches significantly change as they are not complete. In the first place, the question is whether, after the acquisition of a certain set of image measurements, this set can be protected using digital watermarking and whether the later reconstruction of complete image affects the watermark detectability. In other words, having in mind that the digital data protection is of great importance in the modern digital age, it is necessary to analyze the watermarking efficiency in the compressive sensing and reconstruction scenario. In this regard, this work proposes and analyzes the watermarking procedures for the protection of digital images, including the special procedure for watermarking of biomedical images. The influence of reconstruction algorithms to the possibility of detection and extraction of the watermark is also analyzed in terms of the number of available measurements, and conclusions were drawn for each of the considered cases.

Sadržaj

UVOD	7
1. Compressive sensing i algoritmi za rekonstrukciju	10
1.1 Uslov rijetkosti reprezentacije u transformacionom domenu	12
1.2. Algoritmi za rekonstrukciju signala.....	16
2. Algoritmi za CS rekonstrukciju slike.....	18
2.1 TV minimization algoritam.....	18
2.1.1. TwIST algoritam	24
2.2 Gradijentni algoritam za rekonstrukciju slike.....	25
3. Digitalni watermarking i primjene.....	27
3.1 Osnovne osobine watermarka	28
3.2 Pregled nekih osnovnih watermarking tehnika za zaštitu digitalne slike	32
3.2.1 Watermarking u DCT domenu.....	33
3.2.2 Watermarking zasnovan na proširenom spektru.....	34
3.2.3. Watermarking u DWT domenu	35
3.2.4. Logo Watermarking	36
4. Watermarking u uslovima komprimovanog očitavanja podataka	38
4.1 Procedura za umetanje watermarka u CS mjerenja i rekonstrukcija watermarkirane slike	39
4.1.1 Detekcija watermarka	42
4.1.2 Eksperimentalni rezultati	44
4.2 Watermarking procedura za zaštitu slike zasnovana na Logo watermarku i komprimovanom očitavanju	46
4.2.1 Ekstrakcija logoa.....	49
4.2.2 CS kao atak na watermarking proceduru i detekciju watermarka	50
4.2.3 Eksperimentalni rezultati	51
4.3 Watermarking procedura za zaštitu MR slika.....	53
4.3.1 Procedura umetanja watermarka.....	53

4.3.2 Procedura za raspršivanje watermarka.....	57
4.3.3 Eksperimentalni rezultati	58
4.4 Analiza robustnosti pseudo-slučajnog watermarka u DCT domenu.....	62
4.4.1 Analiza watermarking ataka zasnovanog na CS rekonstrukciji slike	63
4.4.2 Eksperimentalni rezultati	64
5. Zaključak.....	68
Literatura.....	70

Lista slika

Slika 1.1: Ilustracija formulacije CS problema

Slika 1.2. Ilustracija l_1 i l_2 norme

Slika 3.1. Watermarking u DCT domenu

Slika 3.2. Generalizovana šema watermarking procedure u DWT domenu

Slika 3.3. Šema logo watermarking procedure u DWT domenu

Slika 4.1. Šema CS watermarking procedure

Slika 4.2. Detaljna šema CS watermarking procedure

Slika 4.3. a) Originalna slika Lena, b) rekonstruisana i watermarkirana slika Lena, c) originalna slika Baboon, d) rekonstruisana i watermarkirana slika Baboon

Slika 4.4. Rezultati detekcije watermarka za 25 pravih ključeva i 2500 pogrešnih pokušaja

Slika 4.5. Proces dekompozicije logoa

Slika 4.6. Blok šema ekstrakcije logoa

Slika 4.7. Watermark - Logo podijeljen na tri sloja

Slika. 4.8. Originalna i watermarkirana slika “Baboon”

Slika 4.9. Rezultati rekonstrukcije logoa: a) bez CS ataka, b) nakon CS ataka sa 50% mjerenja, c) nakon CS ataka sa 60% mjerenja, d) nakon CS ataka sa 70% mjerenja

Slika 4.10: Bijele linije predstavljaju linije korišćene za umetanje watermarka i CS rekonstrukciju, žute linije ne sadrže watermark i mogu se iskoristiti za ponovno rekonstruisanje slike koja više neće sadržati watermark

Slika 4.11: Raspršivanje watermarka

Slika 4.12. a) Originalna slika; b) Watermarkirana slika

Slika 4.13. a) Odziv detektora za watermark kreiran duž 48 radijalnih linija i 1000 pogrešnih ključeva (crvenom bojom); b) odzivi detektora za radijalnu masku sa 48 linija pomjerenu za određeni ugao (plavom linijom je označen odziv na watermark, crvenom bojom su označeni pogrešni pokušaji). Horizontalna osa su redni brojevi pokušaja, vertikalna osa je veličina odziva detektora

Slika 4.14. Odzivi detektora za novi raspršeni watermark i proizvoljno izabranu masku sa 48-linija (plavom bojom je obelježen odziv na watermark, crvenom bojom su obelježeni odzivi na pogrešne pokušaje).

Slika 4.15. Test slika zahvaćena šumom: a) Gauss-ov, b) impulsni šum

Slika 4.16. Odzivi detektora na atake: a) Gauss-ov šum; b) impulsni šum; c) median filter; d) JPEG kompresija sa faktorom 40%. Plavom bojom označen je odziv na pravi ključ - watermark, crvenom bojom označeni su odzivi na 1000 pogrešnih ključeva

Slika 4.17. a) Originalna, b) Watermarkirana slika Cameraman

Slika 4.18. Rekonstruisana slika korišćenjem 50% koeficijenata

Slika 4.19. Rezultati detekcije za set pravih ključeva (watermark-ova) označenih plavom bojom i 1000 pogrešnih ključeva označenih zelenom bojom: a) bez ataka, b) nakon CS ataka sa 49% mjerenja, c) nakon CS ataka sa 38% mjerenja, d) nakon CS ataka sa 30% mjerenja, e) nakon CS ataka sa 21% mjerenja

UVOD

Ovaj magistarski rad predstavlja spoj dvije veoma aktuelne oblasti u savremenim digitalnim sistemima, naime, digitalnog watermarkinga i Compressive Sensing-a (CS) odnosno komprimovanog očitavanja podataka. U savremenoj teoriji komprimovanog očitavanja, signali u realnim aplikacijama se mogu u potpunosti rekonstruisati korišćenjem veoma malog broja slučajnih odbiraka, za razliku od konvencionalne teorije zasnovane na Shanon-Nyquist-ovoj teoremi koja definiše minimalnu frekvenciju odabiranja u zavisnosti od maksimalne frekvencije signala. U novonastalim okolnostima, postavlja se pitanje načina primjene watermarking algoritama na redukovani set slučajnih mjerenja signala na osnovu kojih će se dobiti kompletan signal nakon CS rekonstrukcije, kao i pitanje samog uticaja CS rekonstrukcije na efikasnost watermarking procedure.

Digitalni watermarking se bavi tehnikama zaštite digitalnih podataka (audio signala, slika i video signala) korišćenjem principa umetanja tajnog signala (watermarka, ključa ili žiga) u štićeni sadržaj. Watermarking tehnike obično nastoje da obezbijede zaštitu autorskih prava nad sadržajem, praćenje autorizovanih kopija sadržaja, ili služe za utvrđivanje autentičnosti multimedijalnih sadržaja. Standardni watermarking algoritmi sastoje se iz dva dijela: procedure za umetanje watermarka u štićeni sadržaj i procedure za detekciju watermarka nakon umetanja. Postojeće watermarking procedure su razvijane za slučajeve standardno snimljenih podataka. Naime, u klasičnom scenariju akvizicije podataka, prikuplja se kompletna informacija, tako da je cjelokupan signal dostupan za umetanje i detekciju watermarka. Međutim, novija istraživanja su pokazala da za većinu signala u realnim aplikacijama nije potrebno snimati kompletnu informaciju, jer ona često sadrži veliki procenat redundantnosti, a sa druge strane zahtijeva značajne resurse u pogledu potrošnje energije, senzora i memorijskih kapaciteta. Čak i kada se snima u cjelosti, ova informacija se zatim komprimuje korišćenjem zahtjevnih kompresionih algoritama za audio signale, slike i video signale. Stoga je razvijena nova teorija komprimovanog očitavanja signala koja garantuje da se signali pod određenim uslovima

mogu u potpunosti rekonstruisati na osnovu veoma malog procenta snimljenih uzoraka. U okviru CS koncepta, mjerenja signala se uzimaju slučajnim putem u različitim vremenskim ili prostornim instancama, dok se rekonstrukcija kompletnog signala vrši primjenom osobine rijetkosti (sparsity) reprezentacije signala u nekom transformacionom domenu. Dakle, dva važna preduslova za primjenu CS koncepta su inkohherentnost mjerenja koja se postiže njihovim slučajnim odabirom, i postojanje kompaktne reprezentacije u nekom domenu sa svega nekoliko značajnih (nenultih) koeficijenata.

U magistarskom radu biće razmatrani i predloženi modaliteti i tehnike watermarkinga za slučajeve signala u scenariju komprimovanog snimanja uzoraka. Dakle, otvaraju se veoma interesantni izazovi u smislu umetanja watermarka u mali segment snimljenih odbiraka signala, kao i robusnosti ovako umetnutog watermarka imajući u vidu da će watermarkirani odbirci signala biti podvrgnuti proceduri totalne rekonstrukcije signala kako bi se dobila kompletna predstava o signalu. U prvom redu, ovaj magistarski rad se bavi problemom zaštite prirodnih i biomedicinskih slika, kod kojih treba postići nevidljivost umetnutog watermarka da se ne bi narušio kvalitet slike, a istovremeno i detektibilnost watermarka na osnovu malog dijela dostupnih elemenata slike. Detekcija je bazirana na mjerenju odziva watermark detektora ili na perceptualnom posmatranju ekstraktovanog watermarka. U cilju dokazivanja autorskih prava, autor digitalnog materijala treba da bude u mogućnosti da ekstraktuje watermark iz signala. U razmatranom slučaju, usljed komprimovanog očitavanja podataka, na raspolaganju je manje podataka za detekciju umetnutog watermarka, pa se sama primjena compressive sensing-a može tretirati kao jedna vrsta ataka na watermark čiji je uticaj potrebno posebno analizirati.

U magistarskom radu su razmatrane procedure za umetanje watermarka u CS mjerenja i rekonstrukciju watermarkirane slike, pri čemu su korišćena dva tipa watermarka: slučajna sekvenca i logo watermark, kao i njima prilagođene procedure umetanja i detekcije/ekstrakcije. Ujedno, razmatrana je i posebna procedura za zaštitu CS biomedicinskih slika zasnovanih na CS odabiranju u dvodimenzionom domenu diskretne

Fourierove transformacije. Poseban dio posvećen je analizi uticaja komprimovanog očitavanja na detekciju watermarka ili drugim riječima uticaj CS-a kao ataka na watermarking proceduru.

Prvo poglavlje opisuje koncept kompresivnog očitavanja podataka i osnovne preduslove za rekonstrukciju signala na osnovu malog broja snimljenih mjerenja. U drugom poglavlju izloženi su neki karakteristični algoritmi za rekonstrukciju slike zasnovani na metodu totalnih varijacija i gradijentnom algoritmu. Treće poglavlje je posvećeno proceduri watermarkinga za zaštitu digitalnih podataka, te osnovnim algoritmima za watermarking slike u transformacionom domenu. U četvrtom poglavlju razmatrana je mogućnost primjene watermarkinga u prisustvu CS scenarija. Predložene su procedure za watermarking korišćenjem pseudo-slučajne sekvence, logo-watermarka i procedura za zaštitu MR slika. U svim razmatranim slučajevima pretpostavka je da imamo set CS mjerenja u koje se umeće watermark, potom se vrši rekonstrukcija kompletne slike i analizira mogućnost detekcije umetnutog watermarka u okviru rekonstruisanog sadržaja. Poseban osvrt je dat na mogućnost korićenja CS rekonstrukcije kao novog ataka na watermarking proceduru. U petom poglavlju dati su osnovni zaključci proistekli iz ovog rada.

1. Compressive sensing i algoritmi za rekonstrukciju

Savremeno doba karakteriše ogromna količina digitalnih podataka koju generišu i prikupljaju uređaji i senzori u raznovrsnim aplikacijama, počev od multimedijalnih aplikacija, biomedicinskih, radarskih, komunikacionih i drugih sistema. Ovako velike količine podataka zahtijevaju značajne kapacitete za smještanje, prenos i obradu. Zahtijevana količina digitalnih podataka koja se definiše kao broj potrebnih digitalnih odbiraka ili mjerenja definisan je fundamentalnom teoremom u komunikacijama, tzv. Shanon-Nyquist-ova teorema o odabiranju. Shodno ovoj teoremi, signal se može tačno rekonstruisati samo ukoliko je frekvencija odabiranja bar dvostruko veća od maksimalne frekvencije signala ($2f_{\max}$). Očigledno je da će odabiranje signala u skladu sa ovom teoremom proizvoditi ogroman broj odbiraka signala naročito ako se radi o signalima sa visokom maksimalnom frekvencijom. Donedavno, proces akvizicije signala u realnim aplikacijama je uglavnom bio implementiran u skladu sa teoremom o odabiranju, a zatim su se u cilju uštede smještajnih, prenosnih i računskih kapaciteta, podaci komprimovali sve do prihvatljivog nivoa kvaliteta primjenom veoma kompleksnih algoritama za kompresiju podataka. Kompresioni algoritmi su zasnovani na pretpostavci da snimljeni signali zapravo sadrže veliku količinu redundantnih podataka koji nisu svi potrebni da bi se percipirao dobar kvalitet signala. Prilikom dizajna kompresionih algoritama obično se uzima u obzir nesavršenost ljudskih čula, dok se sa druge strane koriste i neke specifične karakteristike konkretnog signala koji se komprimuje. Na primjer, u slučaju digitalnih slika, diskretna kosinusna transformacija obezbjeđuje veoma kompaktnu reprezentaciju slike u frekvencijskom domenu, te se ovo svojstvo koristi da se ogroman broj koeficijenata zanemari (postavi na vrijednost nula) bez vidljivih posljedica na kvalitet slike. Međutim, primijetimo da se u ovakvim sistemima najprije snima kompletna informacija, a zatim se ogroman procenat te informacije zanemaruje primjenom

kompresije. Drugim riječima, iako smo smanjili količinu informacija primjenom kompresionih algoritama, i dalje uzrokuje veliku potrošnju senzora, energije, ili čak vremena za snimanje što je nedozvoljeno ukoliko se snimanje odnosi na biomedicinske uređaje (skenere, MRI i slično). Dakle, postavlja se logično pitanje, da li je zapravo moguće da se količina podataka/informacija značajno smanji tokom samog procesa akvizicije, te da li je moguće rekonstruisati kompletan signal ili signal na osnovu malog broja izmjerenih podataka?

U posljednjih nekoliko godina intenzivno se razvijaju CS pristupi akviziciji i rekonstrukciji signala u realnim aplikacijama, kako bi se prevazišla ograničenja konvencionalnih teorija. Kompresivno očitavanje omogućava da prikupljamo značajno manji broj podataka, ali da i dalje obezbijedimo isti kvalitet konačne reprezentacije kao i u slučaju kada snimamo na tradicionalan način kompletnu informaciju. U tom smislu, značajni naponi su usmjereni ka razvoju metoda koji bi omogućili da odabiramo signale sa značajno manjim brojem odbiraka. CS otvara mogućnost da se pojednostave veoma skupi uređaji i aparature za snimanje, skeniranje, mjerenje (na primjer MRI uređaji, PET skeneri za kompjutersku tomografiju, visoko-rezolucione kamere, i slično). Pored toga vrijeme snimanja podataka može biti značajno smanjeno, čak 5-10 puta u pojedinim aplikacijama.

Po teoriji komprimovanog očitavanja signal se može u potpunosti rekonstruisati na osnovu malog broja odbiraka ukoliko ima rijetku (kompaktnu) predstavu u nekom transformacionom domenu. Ovo znači da se signal u određenom domenu može predstaviti sa malim brojem nenultih koeficijenata. Drugi važan uslov za primjenu CS teorije su linearno nezavisna mjerenja (uslov inkoherencije). Veći stepen inkoherencije znači manji broj potrebnih mjerenja za kompletnu rekonstrukciju signala.

Ukoliko je proces kompresivnog očitavanja podataka linearan, tada se problem rekonstrukcije kompletnog signala na osnovu mjerenja može riješiti u vidu sistema linearnih jednačina. Pretpostavimo da se proces mjerenja može modelovati određenom matricom mjerenja Φ . Stoga se proces mjerenja koji se primjenjuje nad signalom $\mathbf{f}$ sa N

odbiraka može predstaviti kao problem rekonstrukcije signala korišćenjem skupa od M mjerenja dobijenih na osnovu matrice mjerenja Φ na sljedeći način:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

gdje $\mathbf{y}$ predstavlja vektor koji sadrži mjerenja signala $\mathbf{f}$.

Primijetimo da je u tradicionalnim sistemima za odabiranje signala, broj mjerenja M jednak ukupnoj dužini signala N . Međutim, CS sistemi omogućavaju slučajan odabir M mjerenja, i rekonstrukciju signala čak i u situacijama kada je ovaj broj mjerenja značajno manji od dužine signala, $M \ll N$. Napomenimo opet da je rijetkost reprezentacije signala u nekom od transformacionih domena važan zahtjev koji treba da bude zadovoljen da bi mogli efikasno rekonstruisati kompletan signal. U CS teoriji, kompletna rekonstrukcija signala se zapravo može formulisati kao problem rješavanja neodređenog sistema linearnih jednačina korišćenjem uslova rijetkosti reprezentacije. U cilju obezbjeđivanja rijetke predstave signala neophodno je obezbijediti pogodnu transformacionu bazu.

CS rekonstrukcija je najčešće zasnovana na veoma moćnim matematičkim algoritmima za minimizaciju greške. Postoji nekoliko standardnih algoritama koji se koriste za CS rekonstrukciju, na primjer, algoritmi zasnovani na minimizaciji ℓ_1 -norme, zatim alternativni pristupi zasnovani na tzv. greedy algoritmima i među njima najpoznatiji OMP (Orthogonal matching pursuit).

1.1 Uslov rijetkosti reprezentacije u transformacionom domenu

Ovaj uslov koji je neophodan da bi se mogla izvršiti rekonstrukcija signala, podrazumijeva da signal u transformacionom domenu sadrži samo mali broj nenulatih koeficijenata (u poređenju sa kompletnom dužinom signala). Većina realnih signala posjeduje ovo svojstvo, odnosno može se definisati transformacija koja će obezbijediti rijetku (kompaktnu) reprezentaciju. Signal f dužine N odbiraka može se zapisati kao

linearna kombinacija ortonormalnih funkcija koje predstavljaju bazu određenog transformacionog domena:

$$f(n) = \sum_{i=1}^N X_i \psi_i(n), \text{ odnosno : } \mathbf{f} = \mathbf{\Psi X}. \quad (1.2)$$

Ukoliko je broj koeficijenata u okviru vektora signala $\mathbf{x}$ jednak $K \ll N$, tada možemo reći da je signal rijedak u tom domenu, gdje je K stepen kompaktnosti reprezentacije. Osobina kompaktnosti reprezentacije u transformacionom domenu se koristi i kod kompresionih algoritama, na način da se kodiraju samo K najznačajnijih koeficijenata (ostali se podrazumijevaju da su nule). Signali u realnim aplikacijama su obično takvi da imaju određeni broj K značajnih koeficijenata dok se preostalih $N-K$ koeficijenata mogu zanemariti (smatrati da su nulte vrijednosti), a da pri tome nećemo vidljivo narušiti kvalitet signala. Među transformacionim domenima koji se najčešće koriste u ove svrhe možemo izdvojiti domen diskretne Fourier-ove transformacije (DFT), diskretne kosinusne transformacije (DCT), wavelet transformacije, domen Hermitske transformacije, vremensko-frekvencijske reprezentacije i slično.

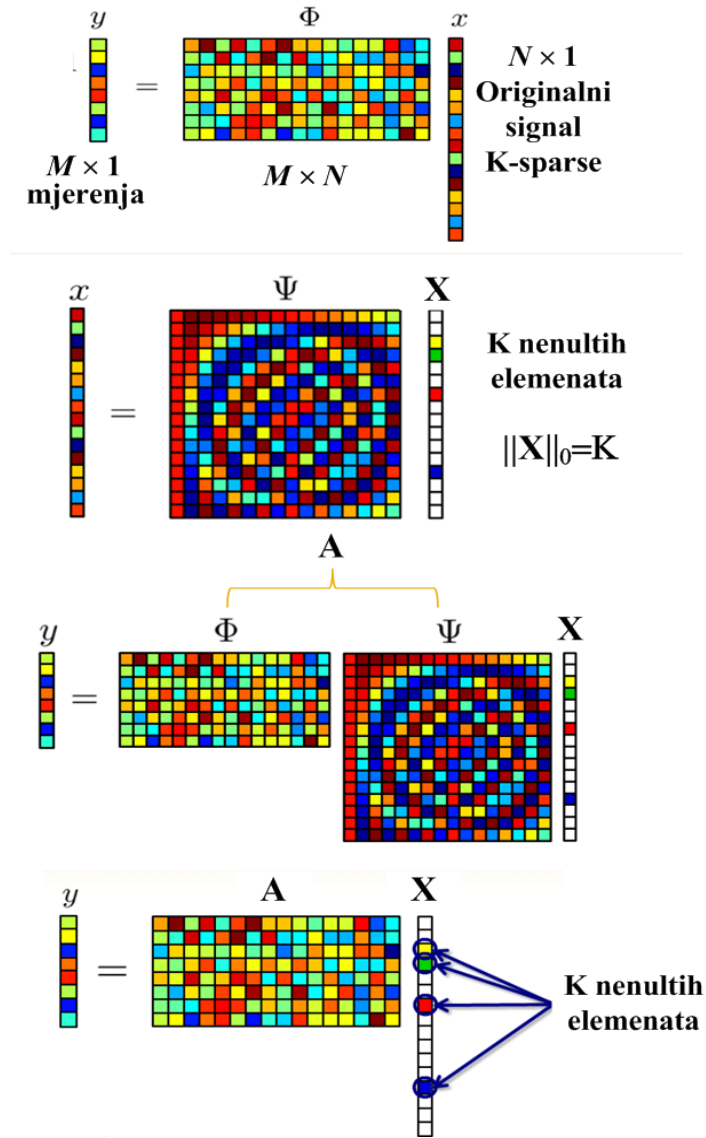
U CS teoriji, uslov rijetkosti reprezentacije u transformacionom domenu se najčešće zapisuje korišćenjem ℓ_0 -norme, kojom se definiše broj nenultih elemenata u vektoru:

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N |X(i)|^p = \sum_{i=1; X(i) \neq 0}^N 1 = K. \quad (1.3)$$

Na osnovu relacija (1.1) i (1.2) imamo da je:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi \Psi x} = \mathbf{A X}. \quad (1.4)$$

Primijetimo da je vektor mjerenja dužine M odbiraka, dok je matrica $\mathbf{A}$ dimenzija $M \times N$. Ilustracija prezentovanog koncepta data je na Slici 1.1. Dakle, relacija (1.4) definiše sistem sa M linearnih jednačina sa N nepoznatih u okviru transformacionog vektora $\mathbf{X}$. Ovaj sistem je neodređen i može imati beskonačno mnogo rješenja.



Slika 1.1: Ilustracija formulacije CS problema

Međutim, ukoliko bismo pretpostavili da su poznate pozicije nenultih koeficijenata u okviru transformacionog vektora X , tada se problem svodi na:

$$y = A_{cs} X, \quad (1.5)$$

gdje je $\mathbf{X}$ vektor koji sadrži samo nenulte elemente iz vektora $\mathbf{X}$, dok je matrica $\mathbf{A}_{cs}$ dobijena od matrice $\mathbf{A}$ zadržavajući samo kolone na pozicijama nenulih komponenta, a odbacujući sve one koje odgovaraju nultim elementima iz $\mathbf{X}$.

Ovaj problem se sada može riješiti korišćenjem metode najmanjih kvadrata:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{cs}^T \mathbf{A}_{cs} \mathbf{X} &= \mathbf{A}_{cs}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{X} &= (\mathbf{A}_{cs}^T \mathbf{A}_{cs})^{-1} \mathbf{A}_{cs}^T \mathbf{y}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Primijetimo da rezultatni vektor $\mathbf{X}$ ima K elemenata, koji su nenulti elementi iz $\mathbf{X}$.

Međutim u praktičnim situacijama, pozicije nenulih K elemenata nisu poznate. Stoga se problem CS rekonstrukcije definiše kao optimizacioni problem pronalaženja rješenja sa najmanjim brojem komponenta u transformacionom domenu ($\mathbf{X}$) koje najbolje odgovaraju poznatom vektoru mjerenja $\mathbf{y}$:

$$\min \|\mathbf{X}\|_0 \text{ tako da } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (1.7)$$

Rješenje ovog problema podrazumijeva da moramo ispitati sve kombinacije K od N elemenata (pozicija elemenata) iz vektora $\mathbf{X}$, što je u najvećem broju slučajeva računski veoma zahtjevno i neprihvatljivo sa aspekta vremena potrebnog za računanje svih ovih kombinacija. Stoga se umjesto ℓ_0 -norme koristi često ℓ_1 -norma definisana kao:

$$\|\mathbf{X}\|_1 = \sum_{i=1}^N |X_i|. \quad (1.8)$$

pri čemu se optimizacioni problem svodi na:

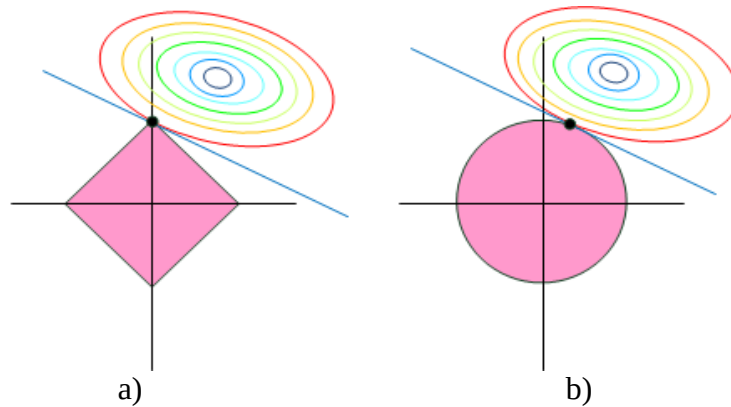
$$\min \|\mathbf{X}\|_1 \text{ tako da } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (1.9)$$

Za razliku od ℓ_0 -norme, ℓ_1 -norma je konveksna i omogućava primjenu linearnog programiranja za rješavanje optimizacionog problema. U realnim aplikacijama je često prisutan i šum, pa se ranije opisani minimizacioni problem može modifikovati kao:

$$\min \|\mathbf{X}\|_1 \text{ tako da } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_2 \leq \varepsilon, \quad (1.10)$$

gdje ε definiše nivo šuma.

Na kraju napomenimo da je u nekim situacijama moguće koristiti i minimizaciju ℓ_2 -norme, koja je računski veoma jednostavna, ali ne garantuje tačno rješenje. Naime, dok ℓ_1 -norma uglavnom uspješno pronalazi rješenje sa minimalnim brojem nenultih koeficijenata, optimalno rješenje dobijeno minimizacijom ℓ_2 -norme ne mora da bude tačno i u velikom broju slučajeva nije spars. Geometrijska ilustracija i poređenja prirode ℓ_1 i ℓ_2 -norme data su na Slici 1.2. Primijetimo da ℓ_1 geometrija ima izražene uglove i sa velikom vjerovatnoćom će presječna linija sa linijom ili nekom drugom funkcijom biti u jednom od uglova, što nije slučaj sa ℓ_2 -normom.



Slika 1.2. Geometrijska ilustracija a) ℓ_1 i b) ℓ_2 norme

1.2. Algoritmi za rekonstrukciju signala

U praksi se koriste različiti algoritmi za rekonstrukciju signala:

- Prva klasa algoritama zasnovanih na Basis pursuit principu koristi konveksne optimizacione metode, kod kojih se najprije formira određena konveksna optimizaciona funkcija a zatim se vrši njena minimizacija, čime se dolaskom u tačku minimuma postiže optimalno rješenje sistema. U ovu grupu spadaju i algoritmi zasnovani na gradijentu promjene vrijednosti nedostajućih odbiraka,

- metod najbržeg spuštanja i slični metodi. Interesantno je napomenuti da ovi metodi obezbjeđuju zadovoljavajuće rezultate čak i za signale koji ne zadovoljavaju uslov rijetkosti u najstrožijem smislu.
- Druga grupa algoritama je zasnovana na heurističkim (greedy) metodama koje u svakoj iteraciji odabiraju neko lokalno-optimalno rješenje težeći ka globalnom optimumu rješavanog problema. U ovu grupu spadaju algoritmi zasnovani na pretraživanju ortogonalnog poklapanja (Orthogonal Matching Pursuit - OMP), kao i brojne varijante ovog algoritma, Stagewise OMP, CoSaMP, itd.
 - Treća grupa algoritama zasnovana je na upotrebi pragova za detekciju komponenti signala. Detekcijom komponenti zapravo se detektuju njihove pozicije, a u cilju određivanja pravih vrijednosti, kao finalni korak, primjenjuje se metoda najmanjih kvadrata. Interesantno je napomenuti da su vrijednosti pragova koji se primjenjuju zapravo rezultat analize ponašanja koeficijenata u određenom transformacionom domenu. Naime, što je manji broj dostupnih mjerenja M to je odgovarajuća N -dimenziona transformacija (dobijena korišćenjem pretpostavke da su nedostajuće vrijednosti nule) sve manje rijetka odnosno kompaktna, što se modeluje kao povećanje šuma u transformacionom domenu. Karakterizacijom šuma moguće je automatski odrediti vrijednost praga koji će biti iznad šuma, a da pri tome sve tražene komponente budu iznad praga.
 - Četvrta grupa algoritama je specifična samo po činjenici da umjesto samog signala odnosno njegove transformacije u minimizacionom CS problemu rekonstrukcije figuriše gradijent odnosno razlike među koeficijentima. Ovo je naročito primjenjivo kod slike koja često ne zadovoljava sama po sebi uslov rijetkosti, ali zato zadovoljava njen gradijent.

U sljedećem poglavlju će biti detaljno izloženi neki od značajnih algoritama za rekonstrukciju slike.

2. Algoritmi za CS rekonstrukciju slike

2.1 TV minimization algoritam

Imajući u vidu da slika nema rijetku predstavu niti u domenu frekvencija niti u prostornom domenu, za njenu rekonstrukciju iz relativno malog broja dostupnih odbiraka nije pogodno korišćenje l_1 minimizacije, već se u tu svrhu koriste alternativni metodi. Ovi metodi zasnivaju se na činjenici da je gradijent slike rijedak (*spars*), pa se minimizuje norma gradijenta. Najčešće korišćena norma je minimizacija totalne varijacije (*total-variation minimization* - TV). Primijenjena na 2D signale, TV norma predstavlja l_1 normu gradijenta, i za većinu realnih signala TV minimizacija pokazuje bolje rezultate u odnosu na minimizaciju baziranu na l_2 normi. Totalna varijacija je uvedena od strane Rudin, Osher i Fatemi-ja, kao regularizacioni kriterijum za rješavanje inverznih problema. Metod totalne varijacije se pokazao veoma efikasnim u regularizaciji slike, ne oštećujući ivice objekata u slici (tj. čuvajući ivice objekata od ravnjanja). U nastavku je dat detaljniji opis inverznih problema, kao i metoda za njihovo rješavanje.

U tzv. inverznim problemima, cilj je estimirati signal (sliku) $\mathbf{X}$ iz mjerenja $\mathbf{y}$. Mjerenja, koja se modeluju primjenom operatora $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ - CS matrica) na originalni signal, mogu biti šumna: $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{n}$. U zavisnosti od operatora $\mathbf{A}$, problem se može svesti na linearnu inverziju (ukoliko je $\mathbf{A}$ linearno) ili na dekonvolucioni problem (ukoliko je $\mathbf{A}$ predstavljeno kao konvolucija sa nekom funkcijom jezgra). Linearno inverzni problemi se odnose na estimaciju nepoznatog signala ili slike, u slučajevima kada ti signali zadovoljavaju određene uslove (kao što je npr. rijetkost u nekom domenu), ili signal (tj. slika) mora biti dio po dio gladak. Ovaj tip problema se javlja u aplikacijama koje uključuju otklanjanje šuma iz slike, rekonstrukciju slike kao i u aplikacijama

kompresivnog očitavanja. Standardni pristup rješavanju linearno inverznih problema svodi se na definisanje objektivne funkcije. Minimizacijom objektivne funkcije po $\mathbf{X}$ dobija se traženo rješenje.

Posljednjih decenija razvijen je veliki broj pristupa za rješavanje inverznih problema. Često korišćeni pristupi, pored regularizacionih tehnika i principa varijacija, zasnovani su na *wavelet shrinkage* metodama – primjenom wavelet transformacije na šumnu sliku, šum će biti raspoređen uglavnom na koeficijente koji se nalaze na visokim frekvencijama. Teorijski, velika količina šuma bi se mogla izbjeći ako se koeficijenti malih amplituda postave na nulu. Nedostatak ovog metoda je pojava artifakata koji su posljedica Gibsovog fenomena, a on se djelimično prevazilazi uvođenjem *soft* i *hard wavelet shrinkage* metoda.

Posmatrajmo signal:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{n}, \quad (2.1)$$

Gdje je $\mathbf{X}$ signal koji se estimira, $\mathbf{n}$ je aditivni šum a $\mathbf{A}$ je matrica koja modeluje proces uzimanja mjerenja (ukoliko relacija predstavlja npr. problem zamućenja u slici, onda će matrica $\mathbf{A}$ biti konvoluciona matrica), a vektor $\mathbf{y}$ predstavlja vektor mjerenja. Prethodna relacija se može posmatrati kao linearno inverzni problem. Neka je objektivna funkcija definisana kao:

$$F(\mathbf{X}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{X}) + \lambda R(\mathbf{X}), \quad (2.2)$$

Gdje $d(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{X})$ predstavlja mjeru razlike između signala $\mathbf{y}$ i $\mathbf{X}$, $R(\mathbf{X})$ je regularizaciona funkcija, λ je regularizacioni parametar i važi $\lambda > 0$. Tražimo vrijednost $\mathbf{X}$ -a tako da proizvod $\mathbf{A}\mathbf{X}$ odgovara vektoru $\mathbf{y}$. Za mjeru razlike $d(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{X})$ može se koristiti srednja kvadratna greška:

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{X}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_{l_2}^2. \quad (2.3)$$

Minimizacija prethodne relacije će dati signal $\mathbf{X}$ koji je konzistentan signalu $\mathbf{y}$, u skladu sa kriterijumom srednje kvadratne greške. Signal $\mathbf{X}$ se može dobiti rješavanjem sljedeće

relacije: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$. Međutim, ovakav način traženja rješenja nije pogodan jer se može desiti da $\mathbf{A}$ nije invertibilna matrica. U tom slučaju, matrica je tzv. “ill-conditioned” što može rezultirati amplifikacijom šuma i dovesti do rješenja koje ne odgovara traženom signalu. Uloga funkcije $R(\mathbf{X})$ je da izbjegne probleme ovog tipa. Npr. ukoliko je očekivano da signal $\mathbf{X}$ bude gladak (*smooth*), onda se $R(\mathbf{X})$ bira tako da izbjegne signale koji nijesu glatki. Dalje, signal $\mathbf{X}$ može da sadrži samo nekoliko nenultih članova. U tom slučaju funkciju $R(\mathbf{X})$ bi trebalo izabrati tako da predstavlja broj nenultih vrijednosti signala $\mathbf{X}$. Međutim, ovakav odabir funkcije $R(\mathbf{X})$ nije pogodan za minimizaciju funkcije $F(\mathbf{X})$. Teži se da funkcija $F(\mathbf{X})$ bude konveksna funkcija od $\mathbf{X}$, zbog čega se, u slučajevima kada se zna da je signal $\mathbf{X}$ rijedak, $R(\mathbf{X})$ funkcija bira tako da odgovara l_1 normi, tj:

$$F(\mathbf{X}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{X}\|_1. \quad (2.4)$$

Konvergencija algoritama za rješavanje linearno inverznih problema u velikoj mjeri zavisi od operatora linearne observacije i može biti veoma spora ukoliko je operator tzv. *ill-conditioned* ili *ill-posed*. Posebna pažnja se u posljednje vrijeme posvećuje Iterative shrinkage/thresholding (IST) algoritmima, koji se koriste u rješavanju više dimenzionih optimizacionih problema. Međutim, problem ovih algoritama je spora konvergencija. Konvergencija IST algoritama ubrzana je uvođenjem IST algoritma u dva koraka (two-step Iterative shrinkage/thresholding, TwIST), o čemu će biti riječi kasnije u tekstu.

IST algoritmi imaju formu:

$$\mathbf{X}_{t+1} = (1 - \beta)\mathbf{X}_t + \beta\Psi_\lambda(\mathbf{X}_t + \mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}_t)), \quad (2.5)$$

gdje je parametar $\beta > 1$. Svaka iteracija IST algoritma uključuje sumiranje, množenje matrice i vektora sa $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^T$ kao i primjenu denoising operatora Ψ_λ . Two-Step Iterative shrinkage/thresholding (TwIST) algoritam umjesto jedne, koristi estimaciju iz dva prethodna koraka. Opis algoritma dat je u nastavku:

Algoritam: Two Step Iterative shrinkage/thresholding

Ulazi:

- Parametri linearnog sistema $\mathbf{J}$, $\mathbf{X}$ i $\mathbf{B}$, gdje je $\mathbf{J}$ pozitivno definitna matrica

Izlazi:

- Definiše se tzv. podjela matrice $\mathbf{J}$ na matrice $\mathbf{C}$ i $\mathbf{R}$, tako da važi: $\mathbf{J}=\mathbf{C}-\mathbf{R}$. Matrica $\mathbf{C}$ je pozitivno definitna i traženje njene inverzne matrice je lako izvodljivo (npr. $\mathbf{C}$ može biti dijagonalna matrica)

- $\mathbf{C} = \mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}_t, \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad \begin{matrix} \mathbf{J} = \mathbf{C} - \mathbf{R}, \\ \mathbf{J} = \lambda \mathbf{D}_t + \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{matrix}$

- Za linearni sistem $\mathbf{J}\mathbf{X}=\mathbf{A}^T\mathbf{y}$, TwIST algoritam računa:

$$\mathbf{X}_{t+1} = (1-\alpha)\mathbf{X}_{t-1} + (\alpha-\beta)\mathbf{X}_t + \beta\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{X}_t + \mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}_t)).$$

- Operator $\mathbf{C}^{-1}$ je “denoising” operator. Prethodna relacija se može zapisati kao:

$$\mathbf{X}_1 = \Gamma_\lambda(\mathbf{X}_0),$$

$$\mathbf{X}_{t+1} = (1-\alpha)\mathbf{X}_{t-1} + (\alpha-\beta)\mathbf{X}_t + \beta\Gamma_\lambda(\mathbf{X}_t), \quad t \geq 1.$$

Gdje je funkcija Γ_λ definisana na sljedeći način:

$$\Gamma_\lambda(\mathbf{X}) = \Psi_\lambda(\mathbf{X} + \mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}))$$

dok se “denoising” operator Ψ_λ definiše kao:

$$\Psi_\lambda(\varepsilon) = \arg \min_{\mathbf{X}} \frac{1}{\mu} \Phi_{reg}(\mathbf{X}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \varepsilon\|^2$$

gdje je $\Phi_{reg}(\mathbf{X}) = \sum_i \|D_i \mathbf{X}\|$, kod TV L1 problema.

- Optimalan izbor parametara α i β zadovoljava sljedeću relaciju:

$$\alpha = \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^2 + 1, \quad \beta = \frac{2\alpha}{\max(\zeta_m) + \zeta_1},$$

Gdje je

$$0 < \zeta_1 \leq \lambda_1(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \leq \zeta_m,$$

$$k = \frac{\zeta_1}{\max(\zeta_m)}$$

Već je naglašeno da postoji veliki broj metoda za rješavanje TV minimizacionih problema: *time marching scheme*, *fixed point iteration* metod, majorization-minimization pristup, itd. Rješavanje TV regularizacionih problema korišćenjem ovih metoda je numerički zahtjevno, zbog nediferencijabilnosti TV norme. Ovaj problem se može prevazići uvođenjem pozitivnog parametra ε , koji omogućava diferencijabilnost TV norme.

Jedan od metoda za rješavanje TV problema se bazira na smoothing-u TV člana i rješavanju rezultujućeg problema. TV/L2 problem se može aproksimirati funkcijom:

$$\min_{\mathbf{X}} \sum_i \sqrt{\|D_i \mathbf{X}\|^2 + \varepsilon} + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{y}\|^2, \quad (2.6)$$

gdje je ε konstanta, $\mathbf{y}$ su mjerenja, $\mathbf{X}$ je slika, $\mathbf{A}$ je CS matrica.

Kao što je već naglašeno, većina pristupa linearno-inverznim problemima definišu rješenje (koje može biti npr. rekonstruisana slika) kao minimizator objektivne funkcije F :

$$F(\mathbf{X}) = \frac{\mu}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2 + \lambda R(\mathbf{X}), \quad (2.7)$$

gdje $\mathbf{y}$ predstavlja mjerenja signala, $\mathbf{A}$ je linearni operator, dok parametar $\lambda \in (0, \infty)$ predstavlja težinski parametar. Funkcija $R(\mathbf{X})$ je regularizaciona funkcija, npr. l_1 norma, TV norma, i slično. Ako je $R(\mathbf{X})$ TV norma, onda važi:

$$R(\mathbf{X}) = \|\nabla \mathbf{X}\|_{l_1}, \quad (2.8)$$

Gdje ∇ predstavlja gradijentni operator i definisan je kao:

$$\nabla_{i,j} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(i+1, j) - \mathbf{X}(i, j) \\ \mathbf{X}(i, j+1) - \mathbf{X}(i, j) \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

za piksel na poziciji (i, j) . TV norma se može zapisati i u diskretnom obliku, na sljedeći način:

$$TV(\mathbf{X}) = \sum_{i,j} \sqrt{(\nabla_{\mathbf{X}}^h)^2 + (\nabla_{\mathbf{X}}^v)^2}, \quad (2.10)$$

Gdje su:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}^h &= \mathbf{X}(i+1, j) - \mathbf{X}(i, j), \\ \nabla_{\mathbf{X}}^v &= \mathbf{X}(i, j+1) - \mathbf{X}(i, j), \end{aligned} \quad (2.11)$$

Razlike po vrstama i po kolonama, respektivno.

Funkcija $R(\mathbf{X})$ može se zapisati u integralnom obliku, kao:

$$R(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{X}| dx dy = \int_{\Omega} \sqrt{\mathbf{X}_x^2 + \mathbf{X}_y^2} dx dy. \quad (2.12)$$

Kao što je već naglašeno, problem IST algoritama je spora konvergencija u slučajevima kad je matrica $\mathbf{A}$ “ill-posed” ili “ill-conditioned”. U cilju poboljšanja konvergencije IST algoritama, uveden je IST algoritam u dva koraka - TwIST algoritam (Two-step Iterative Shrinkage Thresholding Algorithm).

2.1.1. TwIST algoritam

TwIST algoritam u dva koraka za rješavanje sistema $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, može se definisati kao:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= \Gamma_\lambda(\mathbf{X}_0), \\ \mathbf{X}_{t+1} &= (1-\alpha)\mathbf{X}_{t-1} + (\alpha-\beta)\mathbf{X}_t + \beta\Gamma_\lambda(\mathbf{X}_t),\end{aligned}\tag{2.13}$$

gdje je t broj iteracije i $t \geq 1$, a parametri α i β zadovoljavaju uslov $\alpha, \beta > 0$. Optimalan izbor parametara α, β može se odrediti na osnovu relacija datih u tabeli (strana 23). Vektor $\mathbf{X}_0$ je početni vektor i može imati korisnički definisanu vrijednost, ili je $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$. Funkcija $\Gamma_\lambda(\mathbf{X})$ se definiše kao $\Gamma_\lambda(\mathbf{X}) = \Psi_\lambda(\mathbf{X} + \mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}))$, a Ψ_λ je denoising operator:

$$\Psi_\lambda(\varepsilon) = \arg \min_{\mathbf{X}} \frac{1}{\mu} \Phi_{reg}(\mathbf{X}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2.\tag{2.14}$$

Funkcija $\Phi_{reg}(\mathbf{X})$ predstavlja regularizacionu funkciju. U slučaju kad je $\mathbf{A}$ parcijalna matrica Fourier-ove transformacije, uveden je **RecPF algoritam**, koji takođe rješava TV probleme bazirane na l_1 ili l_2 normi. Definiše se na sljedeći način:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{TV} + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{y}\|_{l_2}^2.\tag{2.15}$$

Algoritam se svodi na minimizaciju sljedeće funkcije:

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{X}, \omega} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|\omega_i\|_{l_2} + \frac{\beta}{2} \|\omega_i - \nabla_i \mathbf{X}\|_{l_2}^2 \right) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{y}\|_{l_2}^2, \\ \text{tako da važi } \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N \\ \forall i \ \omega_i \in \mathbb{R}^2, \end{cases}\end{aligned}\tag{2.16}$$

gdje ∇_i predstavlja izvode slike u i -tom pikselu. Za CS rekonstrukciju baziranu na Fourier-ovim mjerenjima, pokazuje se da RecPF algoritam daje dobre rezultate, uz kratko vrijeme izvršavanja algoritma.

2.2 Gradijentni algoritam za rekonstrukciju slike

Ovaj algoritam je zasnovan na pretpostavci da slika ima rijetku (kompaktnu) reprezentaciju u DCT domenu. Osnovna ideja algoritma je da se kroz niz iteracija vrijednosti nedostajućih piksela posmatraju kao varijable koje se mijenjaju postepeno tokom iteracija sve dok ne dosegnu svoju tačnu vrijednost. Konvergencija prema tačnim vrijednostima nedostajućih piksela je obezbijeđena primjenom mjere rijetkosti reprezentacije u DCT domenu. Dakle, nedostajući pikseli variraju svoje vrijednosti u smjeru postizanja veće rijetkosti reprezentacije (kompaktnije reprezentacije). Kao mjera rijetkosti koristi se koncentracija DCT transformacije. Preciznije rečeno, posmatra se razlika koncentracija u DCT domenu, dobijenih dodavanjem i oduzimanjem iste vrijednosti (koraka) određenom nedostajućem pikselu. Na osnovu te razlike računa se gradijent koji se koristi da ažurira vrijednost tog posmatranog piksela. Procedura se ponavlja za sve nedostajuće piksele. Napomenimo da se ovaj postupak ne odnosi na dostupne piksele, koji ostaju nepromijenjeni tokom izvršavanja algoritma. Postupak se ponavlja sa konstantnim ili adaptivnim korakom sve dok dalje promjene ne prestanu da utiču na koncentraciju signala, kada smatramo da smo došli do optimalnog rješenja. Alternativno, radi jednostavnosti, možemo takođe pretpostaviti neki konkretan broj iteracija, te tako izbjeći stalnu provjeru kriterijuma za zaustavljanje algoritma (npr. provjeru kvaliteta slike zasnovanu na SNR ili slično).

U cilju računске efikasnosti, algoritam se obično implementira na blokovima slike, koji mogu biti različite veličine: 8×8 , 16×16 , 32×32 , i tako redom.

Algoritam: Gradijenti algoritam za rekonstrukciju slike Signal Reconstruction

Ulazi:

- Pozicije mjerenja $\mathbf{N}_M$, tj. dostupnih piksela
 $(n, m) \in \{(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_M, m_M)\}$
- Dostupni odbirci $f(n, m)$, $(n, m) \in \mathbf{N}_M$
- Broj iteracija: *Broj*
- Mjerenja: $y(n, m) = \begin{cases} f(n, m), & \text{za } (n, m) \in \mathbf{N}_M \\ 0, & \text{za } (n, m) \notin \mathbf{N}_M \end{cases}$
- Za prvu iteraciju: $y_1(n, m) = y(n, m)$

Izlazi:10: **For** $q=1$:*Broj*11: **Set** $i \in \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$ i $j \in \{m_1, m_2, \dots, m_M\}$

$$12: \quad y^+(n, m) = y_q(n, m) + \Delta \delta(n - i, m - j)$$

$$y^-(n, m) = y_q(n, m) - \Delta \delta(n - i, m - j)$$

$$13: \quad X^+(k_1, k_2) \leftarrow \text{DCT} \{y^+(n, m)\}$$

$$14: \quad X^-(k_1, k_2) \leftarrow \text{DCT2} \{y^-(n, m)\}$$

$$15: \quad G_q(n, m) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} |X^+(k_1, k_2)| - |X^-(k_1, k_2)|$$

($G(n, m)$ je gradijent za poziciju (m, n) , dok index q iznačava broj iteracije)

$$16: \quad y_{q+1}(n, m) = y_q(n, m) - G_q(n, m)$$

$$17: \quad \beta_q = \arccos \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} G_{q-1}(n, m) G_q(n, m)}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} (G_{q-1}(n, m))^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} (G_q(n, m))^2}}$$

$$18: \quad \text{if } \beta_q > 170^\circ$$

$$19: \quad \Delta \leftarrow \Delta / \sqrt{10}$$

20: **End**21: **End**

3. Digitalni watermarking i primjene

Digitalni watermarking počeo je da se razvija paralelno sa ekspanzijom digitalnih podataka i medija za smještanje istih. Naime, digitalni podaci se čuvaju na različitim digitalnim uređajima za smještanje podataka i prenose komunikacionim linkovima, a pri tome su veoma osjetljivi sa aspekta zaštite jer se mogu lako modifikovati, kopirati i zloupotrijebiti. Sa druge strane kvalitet digitalnih podataka je znatno veći u odnosu na analogne podatke, pogotovo kada se radi o multimedijalnim sistemima. Osim toga, digitalni multimedijalni podaci mogu biti efikasno obrađivani na računarima i drugim digitalnim uređajima, uz znatno jednostavnije rukovanje i obradu ovih podataka za potrebe multimedijalnih aplikacija. Međutim, ovakvi podaci mogu biti i lako kopirani a da se pri tome ne izgubi na kvalitetu informacije koju prenose, do toga da kopija može biti perceptualno gotovo identična originalu. Distribucija digitalnih podataka na webu je još jedna od opasnosti ili pak izazova kada se govori o zaštiti prava intelektualne svojine. Da bi se odgovorilo ovim izazovima savremenog digitalnog doba, uvedena je ideja digitalnog watermarkinga. Ova tehnika podrazumijeva umetanje ili sakrivanje podataka koji služe za identifikovanje vlasnika digitalnog sadržaja, pri čemu se umetnuti signal naziva watermark. U najvećem broju slučajeva, watermark treba da bude neperceptibilan (nevidljiv), te da ne narušava kvalitet samog signala. To najčešće znači da jačina (energija) umetnutog watermarka ne smije biti značajna u poređenju sa amplitudama i energijom signala koji se štiti. Međutim, da bi watermark ispunio svoju ulogu, on mora biti detektibilan u okviru signala, pri čemu detektibilnost zavisi od njegove jačine (watermark veće energije je lakše detektovati i obratno). Dakle, u realnim situacijama treba naći kompromis između zahtjeva neperceptibilnosti i detektibilnosti. U nastavku su rezimirana neka od osnovnih svojstava watermarka i zahtjeva koji se postavljaju pred nekom watermarking procedurom.

3.1 Osnovne osobine watermarka

1) *Detektibilnost*

Efikasnost watermarking procedure se mjeri vjerovatnoćom detekcije watermarka u okviruštićenog sadržaja. Idealno bi bilo da se watermark u okviru signala može detektovati sa 100% sigurnošću, ali to nije slučaj u većini realnih aplikacija. Naime, za 100% pouzdanu detekciju watermark bi sigurno značajno narušio kvalitet originalnog signala, što nije dozvoljeno u modernim watermarking scenarijima. Na detektibilnost watermarka i efikasnost watermarking procedure utiče i njegova jedinstvenost. Što je watermark više jedinstven to je teže generisati neku novu sekvencu koja će se ponašati kao i sam watermark prilikom njegove detekcije, jer bi takva sekvenca mogla ugroziti dokaz autorskih prava nad sadržajem/signalom.

2) *Neperceptibilnost watermarka*

Neperceptibilnost watermarka je jedan od osnovnih zahtjeva savremenih watermarking procedura, a definiše se i kao perceptualna sličnost između originalnog i watermarkiranog signala, na primjer slike. Kao mjera sličnosti između watermarkirane i originalne slike najčešće se koristi PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) koji se definiše kao:

$$PSNR = 20 \log_{10} \left(\frac{\max^2}{MSE} \right), \quad (3.1)$$

gdje je max promjenljiva koja predstavlja maksimalnu vrijednost osvetljaja, na primjer max=255 kod slike predstavljene sa 8 bita, dok MSE predstavlja srednju kvadratnu grešku računatu između originalne i watermarkirane slike:

$$MSE = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (S(i, j) - S_w(i, j))^2, \quad (3.2)$$

gdje je sa S označena originalna slika, a sa S_w watermarkirana slika.

3) Robustnost watermarka

Ova osobina odnosi se na mogućnost detekcije watermarka nakon primjene nekih metoda obrade nad signalom odnosno slikom. Promjenom watermarkiranog sadržaja usljed primjene neke od standardnih ili malicioznih obrada, watermark može biti djelimično ili potpuno uništen, te se stoga ove obrade koje se primjenjuju nad slikom nazivaju ataci za watermark. Među najčešćim atacima su razni tipovi kompresija, filtriranje, dodavanje šumova (sa ili bez filtriranja), geometrijski ataci. Kako je u skorije vrijeme CS veoma popularna tehnika u smislu rekonstrukcije podataka na osnovu malog broja uzoraka, potencijalno bi primjena CS algoritama mogla da djeluje kao veoma efikasan atak koji ne oštećuje sliku. Naime, CS podrazumijeva slučajno pododabiranje piksela slike na osnovu kojih će se slika opet rekonstruisati u cjelini. Međutim, watermark se može djelimično ili potpunosti izgubiti usljed slučajnog pododabiranja piksela.

U svakom slučaju cilj mnogih watermarking scenarija je da se postigne robustnost na što veći broj ataka. Pri tome ukoliko je slika uništena atakom onda je čak i nesporno da je slika neupotrebljiva te je i dokazivanje autorskih prava ponekad suvišno. S druge strane ukoliko smo u mogućnosti da detektujemo watermark čak i u prisustvu snažnog ataka koji je ošteti sliku, to znači da imamo veoma pouzdanu i robustnu watermarking proceduru. Pored robustnih, napomenimo da postoje i polu-lomljivi i lomljivi watermark. Lomljivi watermark treba da otkrije i najmanju manipulaciju odnosno obradu nad slikom te se obično koristi za dokazivanje autentičnosti podataka, dok polu-lomljivi watermark može da bude robustan na neke unaprijed zadate atake kao na primjer kompresiju ili druge nenamjerne obrade, ali da bude lomljiv u slučaju namjernog pokušaja uklanjanja watermarka.

4) Slijepa detekcija i detekcija sa dostupnim podacima

Kod detekcije watermarka na osnovu dostupnih podataka, logično je da detektor posjeduje originalni sadržaj bez watermarka, te se detekcija watermarka vrši poređenjem originalnog i watermarkiranog sadržaja. U većini watermarking scenarija poželjna je tzv. slijepa detekcija watermarka koja ne zahtijeva postojanje originalnog sadržaja odnosno slike. U skladu sa time, procedure slijepe detekcije su značajno kompleksnije ali omogućavaju veliki stepen sigurnosti uz neznatan prenos podataka potrebnih za detekciju.

Polazeći od pretpostavke da je watermark znatno slabiji u odnosu na originalne koeficijente signala, te primjenjujući principe iz teorije detekcije signala, možemo definisati formu slijepe detekcije watermarka u vidu lokalno optimalnog detektora na sljedeći način:

$$D = \sum g(I_x) \cdot w, \quad (3.3)$$

gdje je g funkcija koja zavisi od raspodjele watermarkiranih koeficijenata slike I_x definisana na sljedeći način:

$$g(I_x) = -\frac{p'(I_x)}{p(I_x)}, \quad (3.4)$$

dok je $p(I_x)$ funkcija gustine vjerovatnoće a $p'(I_x)$ je njen prvi izvod. Dakle, forma detektora je definisana kao korelacija između funkcije g i watermarka w . U najopštijem slučaju većina koeficijenata se može grubo modelovati Gauss-ovom raspodjelom, za koju će lokalno optimalni detektor imati sljedeću formu:

$$D = \sum_{i=1}^M I_x(i) w(i). \quad (3.5)$$

Ovaj detektor je u literaturi poznat kao standardni korelator. Međutim ukoliko odabrani koeficijenti za watermarkiranje podliježu nekoj drugoj funkciji raspodjele, na primjer Laplace-ovoj, generalizovanoj Gauss-ovoj ili Cauchy-jevoj raspodjeli, mogu se izvesti odgovarajuće forme detektora. Na primjer forma detektora koji odgovara generalizovanoj Gauss-ovoj distribuciji koeficijenata je data sljedećim izrazom:

$$D = \sum_{i=1}^M \text{sign}(I_x(i)) |I_x(i)|^{\alpha-1} w(i). \quad (3.6)$$

Za slučaj raspodjele koeficijenata koja prati Cauchy-jevu distribuciju forma detektora će biti data relacijom:

$$D = \sum_{i=1}^M \frac{2(I_x(i) - \delta)}{(I_x(i) - \delta)^2 + \gamma^2} w(i). \quad (3.7)$$

5) Računska kompleksnost

Kompleksnost watermarking procedure se obično odnosi na vrijeme potrebno za izvršavanja potrebnih operacija za umetanje i detekciju watermarka. Da bi se obezbijedila sigurnost watermarking procedure obično je potrebna veća računaska kompleksnost algoritma, dok se sa druge strane teži što bržem izvršavanju operacija da bi se zadovoljile potrebe aplikacija u relanom vremenu. Stoga i u ovom segmentu watermarking procedura treba da obezbijedi određene kompromise između pomenutih oprečnih zahtjeva.

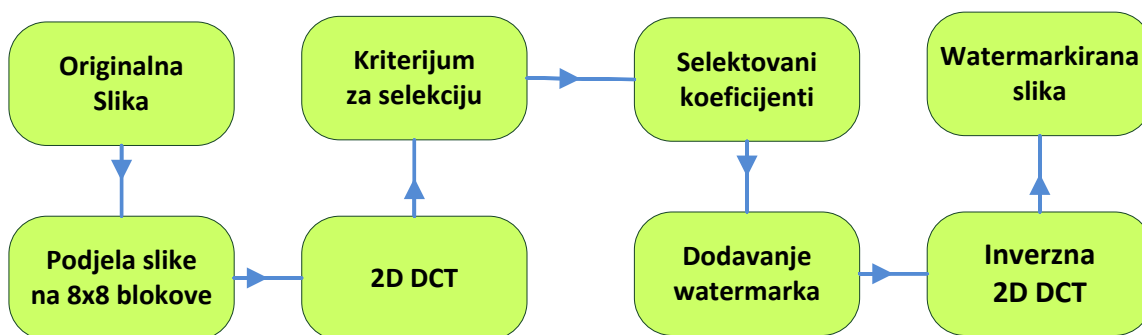
3.2 Pregled nekih osnovnih watermarking tehnika za zaštitu digitalne slike

Različite watermarking tehnike se suštinski mogu klasifikovati u dvije kategorije u pogledu domena u kome se vrši umetanje watermarka. Tako postoje tehnike koje se odnose na prostorni domen odnosno domen piksela u slučaju slike, i tehnike u frekvencijskom domenu. Tehnike u prostornom domenu se zasnivaju na promjeni vrijednosti piksela ali samo u onoj mjeri koja neće narušiti kvalitet same slike. Na primjer ove tehnike mogu da mijenjaju strukturu bita u najmanje značajnim bit ravnima slike ili slično. To znači da ovakve promjene ne mogu biti značajne, te se watermark može lako ukloniti primjenom neke od metoda filtriranja ili kompresije. U svakom slučaju tehnike u prostornom domenu su znatno jednostavnije u pogledu realne implementacije jer ne zahtijevaju najčešće kompleksne operacije i transformacije slike u druge domene. Sa druge strane, znatno više fleksibiliteta i efikasnosti pružaju tehnike u frekvencijskom (transformacionom) domenu. Ljudske vizuelne karakteristike su zavisne od frekvencija, te tehnike u frekvencijskom domenu koriste znanja o ljudskom vizuelnom sistemu i percepciji da se odaberu frekvencijski koeficijenti koji će da obezbijede kompromis između detektabilnosti (uključujući robustnost) i nepereceptibilnosti. Na primjer, vizuelni sistem je znatno osjetljiv na promjene u nisko-frekvencijskom dijelu, za razliku od visoko-frekvencijskih koje se mogu i izostaviti (postaviti na nulte vrijednosti), a da to ne utiče na kvalitet slike. Umetanje u nisko-frekvencijske koeficijente bi ugrozilo kvalitet, a u visoko-frekvencijske koeficijente bezbjednost i detektabilnost watermarka. Stoga se, kao kompromis, najčešće selektuju koeficijenti u srednje-frekvencijskom pojasu. Što se tiče samih transformacija, kod slike se najčešće koriste DCT, DFT i DWT transformacija. Nakon primjene transformacije, selektuju se pogodni koeficijenti, kojima se dodaje watermark (uz faktor skaliranja watermarka da bi se prilagodio jačini koeficijenata

kojima se dodaje). Nakon toga se vrši inverzna transformacija i dobija se watermarkirana slika.

3.2.1 Watermarking u DCT domenu

Standardna watermarking porcedura u DCT domenu najčešće podrazmijeva blokovski pristup umetanju i detekciji watermarka, pri čemu je veličina blokova obično 8×8 u skladu sa standardima JPEG kompresije za sliku. Zatim se primjenjuje neki od kriterijuma za selekciju koeficijenata, na primjer selektuju se koeficijenti na srednjim frekvencijama. Watermark se kreira kao slučajna ili pseudo-slučajna sekvenca koja se dodaje selektovanim koeficijentima. Nakon primjene inverzne DCT dobija se watermarkirana slika. Postupak detekcije watermarka ponavlja korake procedure umetanja. Potrebno je opet sliku podijeliti na 8×8 blokove na koje se primjenjuje dvodimenziona DCT. Zatim se selektuju koeficijenti u koje je umetnut watermark i vrši se detekcija watermarka korišćenjem nekog tipa korelatora. Blok šema watermarking procedure je prikazana na Slici 3.1.



Slika 3.1. Watermarking u DCT domenu

Napomenimo da korišćenje srednje-frekvencijskih koeficijenata blokova 8×8 omogućava veliki stepen robustnosti na JPEG kompresiju jer su ovi koeficijenti generalno najmanje izloženi uticaju kvantizacije i gubljenju informacija.

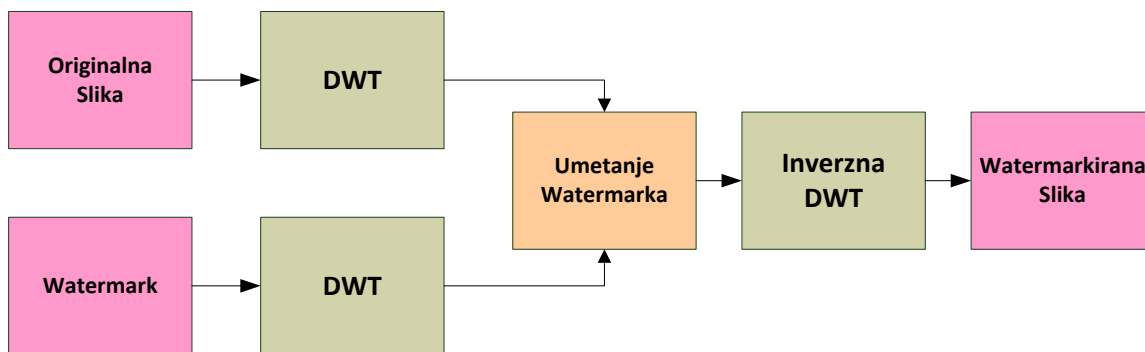
3.2.2 Watermarking zasnovan na proširenom spektru

U cilju postizanja većeg stepena robustnosti za razne tipove ataka, ipak je neophodno da se watermark umetne i u neke perceptualno značajne komponente signala. Glavni izazov koji se ovdje javlja jeste način kreiranja watermark sekvence i način njenog umetanja u sliku koji neće izazvati perceptualnu degradaciju. U cilju određivanja pogodnih koeficijenta mogu se koristiti i posebno dizajnirane maske koje definišu oblasti u frekvencijskom domenu (npr. DCT domenu) koje su pogodne za umetanje. Ove oblasti čak mogu da variraju između različitih blokova slike u zavisnosti od prirode samih blokova. Umetanje watermarka je dizajnirano u skladu sa konceptom preuzetim u komunikacijama proširenog spektra, gdje se nisko-pojasni signal prenosi putem znatno šireg opsega, tako da se energija pridružena svakoj pojedinačnoj frekvenciji (frekvencijskoj komponenti) ne može percipirati i narušiti kvalitet. Ova tehnika watermarkinga se može takođe primjenjivati na 8×8 blokove u DCT domenu, pri čemu se watermark kreira kao Gauss-ova sekvenca realnih brojeva koja se dodaje najznačajnijim komponentama. U cilju verifikacije prisutstva watermarka, računa se kros-korelacija između ekstraktovanog i originalnog watermarka. Eksperimentalni rezultati su pokazali da ovakva procedura pored robustnosti na kompresije, takođe pokazuje određeni stepen robustnosti na skaliranje, kropovanje i neke druge geometrijske transformacije.

3.2.3. Watermarking u DWT domenu

Watermarking u domenu diskretne wavelet transformacije (DWT) se takođe često koristi zbog kompatibilnosti sa modelima ljudskog vizuelnog sistema. U okviru DWT watermarking pristupa, slika se propušta kroz niz nisko-propusnih i visoko-propusnih filtara, koji dekomponuju sliku na podopsege različitih širina odnosno rezolucija. Uglavnom kompletna energija je kao i u slučaju DCT skoncentrisana na niskim frekvencijama, odnosno u okviru LL podopsega. U skladu sa time, dodavanje watermarka u LL podopsegu bi moglo ozbiljno da ugrozi kvalitet slike. Sa druge strane visoko-frekvencijski opsezi sadrže uglavnom sitne detalje, koji često nisu uočljivi te se koeficijenti u ovim podopsezima mogu odbaciti i nisu pogodni za watermarking takođe. Dakle, preostaju koeficijenti u LH ili HL opsezima koji sadrže još uvijek korisne informacije i ne mogu biti lako zanemareni.

Generalizovana šema watermarking procedure u DWT domenu je data na Slici 3.2.



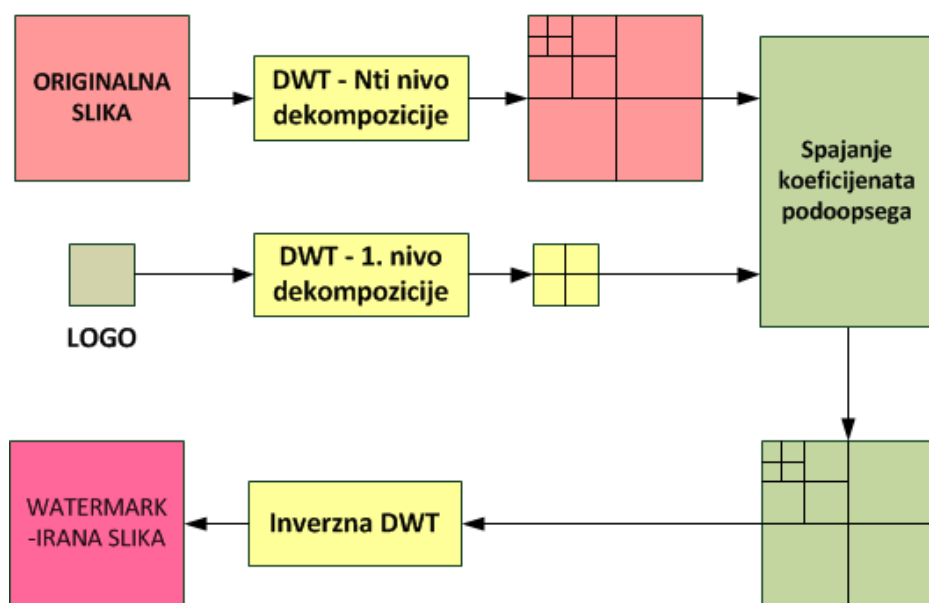
Slika 3.2. Generalizovana šema watermarking procedure u DWT domenu

Watermark se obično kreira kao pseudo-slučajna sekvenca koja se na adaptivan način umeće u koeficijente podopsega. Detekcija se može postići mjerenjem korelacije između watermarkiranih koeficijenata i watermarka (detektori zasnovani na korelaciji). Ujedno, umetanje watermarka je prilagođeno teksturama i osvjetljajima u okviru svakog pojedinačnog podopsega. Rezultati pokazuju veliki stepen robustnosti na kompresije sa

gubicima. Takođe, energija watermarka je prilagođena podopsezima, te je ostvarena velika jačina watermarka bez posljedica na kvalitet slike, što dalje znači da se watermark može lako detektovati i u manjim regionima slike.

3.2.4. Logo Watermarking

Osim pseudo-slučajnih sekvenci, crno-bijeli ili sivo-skalirani logo može da se koristi kao watermark.



Slika 3.3. Šema logo watermarking procedure u DWT domenu

Posmatrajmo na primjer logo watermarking u DWT domenu (Slika 3.3). Jedna od postojećih watermarking procedura zasnovana je na spajanju multi-rezolucionih koeficijenata slike i watermarka u DWT domenu. Naime, logo se najprije dekomponuje na korišćenje samo prvog nivoa wavelet dekompozicije, dok se slika dekomponuje na N nivoa. Svaki od podopsega slike se dijeli u blokove čija veličina odgovara veličini podopsega logoa. Zatim su četiri podopsega logoa dodata blokovima u okviru podopsega slike (svaki je dodat samo onim blokovima iste orijentacije). Prilikom dodavanja logoa

watermark je skaliran određenim faktorom računatim posebno za svaki blok slike. Rezultati detekcije umetnutog watermarka pokazuju visok stepen robustnosti na kompresiju i aditivne šumove, čak i u slučaju kada je watermarkirana slika u potpunosti uništena i neupotrebljiva pod dejstvom ataka.

4. Watermarking u uslovima komprimovanog očitavanja podataka

Tehnike digitalnog watermarkinga su razvijane za slučajeve podataka kod kojih je dostupna cjelokupna informacija, odnosno podataka koji su snimani i diskretizovani u skladu sa tradicionalnim teorijama odabiranja. Međutim, u svijetlu novih trendova, u digitalnim sistemima i digitalnoj obradi podataka, zasnovanih na komprimovanom očitavanju, postavlja se niz pitanja u pogledu primjenljivosti postojećih watermarking algoritama na nepotpune setove podataka. U prvom redu, imajući u vidu da u uslovima komprimovanog očitavanja imamo na raspolaganju samo jedan mali dio odbiraka signala, postavlja se pitanje da li je taj dio podataka dovoljan za umetanje i detekciju watermarka. Drugo važno pitanje je da li će watermark umetnut u dostupne odbirke/piksele izazvati vidljive degradacije slike nakon njene rekonstrukcije na osnovu dostupnih (watermarkiranih) odbiraka/piksela. Nadalje, shodno opštem postupku rekonstrukcije na osnovu malog broja podataka, da li će doći do gubitka informacija o watermarku ukoliko se ponovi postupak CS rekonstrukcije? Drugim riječima, da li se CS može koristiti kao atak na watermarking procedure i detektibilnost watermarka? U ovom slučaju biće razmatran ponovljeni postupak kompresivnog očitavanja podataka, koji podrazumijeva da se iz kompletne informacije (slike), selektuje jedan dio dostupnih koeficijenata, te da se nakon toga izvrši ponovna rekonstrukcija a nakon nje i detekcija watermarka. Interesantno je napomenuti da će uspješnost detekcije nakon ponovljenog postupka komprimovanog očitavanja zasigurno zavisiti od broja uzetih mjerenja.

U nastavku teze biće razmatrani različiti segmenti primjene watermarking procedura u prisustvu komprimovanog očitavanja, sa ciljem da se obezbijede odgovori na gore navedena pitanja.

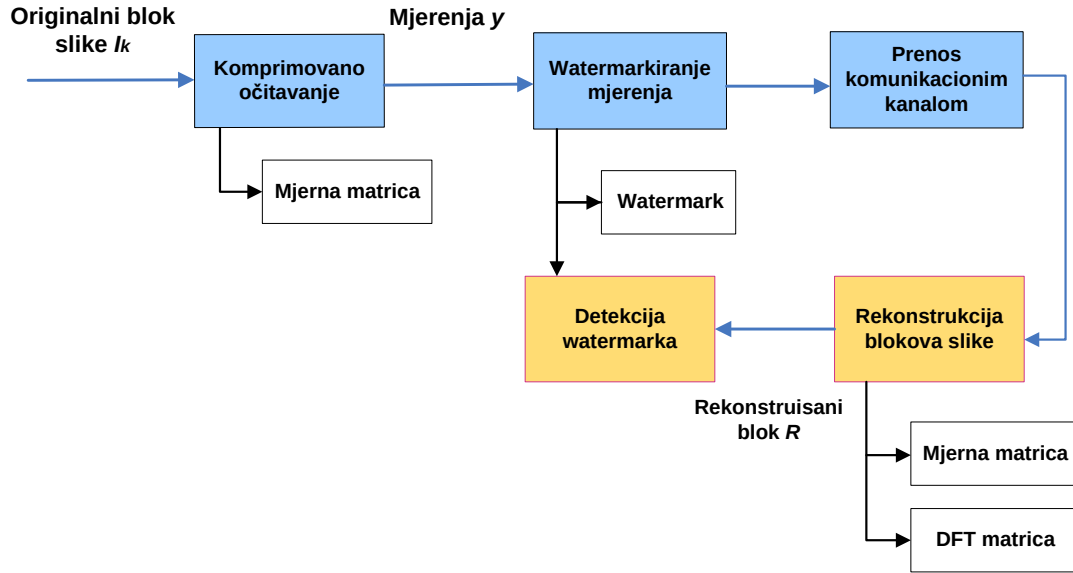
4.1 Procedura za umetanje watermarka u CS mjerenja i rekonstrukcija watermarkirane slike

Kako je napomenuto ranije, prirodne slike obično nisu spars u direktnom smislu, naročito u poređenju sa drugim tipovima signala koji se javljaju u realnim aplikacijama. Stoga se najčešće u algoritmima za 2D slike, podrazumijeva da je gradijent slike spars umjesto same slike. Pretpostavimo dalje da je ovakav 2D signal sniman u uslovima komprimovanog očitavanja, te da su nam umjesto cijele slike dostupni samo pojedini elementi slike, na osnovu kojih treba da vršimo i watermarkiranje i rekonstrukciju kompletne slike. Mjerenja su uzeta slučajnim postupkom iz različitih blokova slike kako bi se obezbijedila ravnomjerna distribucija mjerenja u cijeloj slici. Dakle, posmatrajmo okvir slike izdijeljene u blokove tako da se mjerenja uzimaju nezavisno iz svakog bloka po slučajnoj proceduri. Mjerenja su dobijena iz prostornog domena slike, gdje se može zapravo smatrati da je slika gusta u pogledu reprezentacije njene informacije. Kao domen rijetke reprezentacije, odnosno spars domen, uzeta je dvodimenziona diskretna Fourierova transformacija (DFT), odnosno koeficijenti iz ovog domena. Generalizovana blok šema predložene watermarking procedure prikazana je na Slici 4.1.

Ukoliko vektor mjerenja k -tog bloka slike označimo sa y_k tada procedure mjerenja možemo da zapišemo na sljedeći način:

$$y_k = \Phi_k I_k, \quad (4.1)$$

gdje I_k predstavlja k -ti blok slike dimenzija $P \times P$ (tako da je $P^2 = N$), dok je Φ_k matrica koja definiše proceduru mjerenja za k -ti blok slike i naziva se mjerna matrica. Primijetimo da su mjerenja i originalni odbirci slike smješteni u vektorskom obliku radi lakšeg zapisa procedure mjerenja.



Slika 4.1. Šema CS watermarking procedure

Generalno govoreći, matrica Φ_k može biti čak i ista za različite blokove slike, ali je važno da njeni elementi uzimaju vrijednosti odnosno mjerenja u okviru bloka po slučajnom pravilu. Stoga, možemo zaključiti da se matrica mjerenja i u ovom slučaju može definisati kao matrica nula i jedinica, pri čemu se jedinične vrijednosti pojavljuju samo jednom u okviru jedne vrste matrice, i to na poziciji koja odgovara pojedinačnom mjerenju. Pod pretpostavkom da je ukupan broj elemenata u okviru bloka N , te da je broj dostupnih mjerenja $M \ll N$, zaključujemo da je mjerna matrica Φ_k dimenzija $M \times N$.

DFT koeficijenti se koriste u cilju obezbjeđivanja spars reprezentacije, što je neophodno za kasniju uspješnu rekonstrukciju kompletne slike iz njenih mjerenja. Dakle, ukoliko sa Ψ označimo inverznu DFT matricu, tada blok slike dat vektorom I_k možemo zapisati u spars obliku korišćenjem njegove Fourier-ove transformacije na sljedeći način

$$I_k = \Psi F_k, \quad (4.2)$$

gdje je F_k vektor Fourier-ovih koeficijenata koji odgovaraju bloku k . Na osnovu prethodne dvije relacije imamo da je:

$$\left. \begin{array}{l} y_k = \Phi_k I_k \\ I_k = \Psi F_k \end{array} \right\} \Rightarrow y_k = \Phi_k \Psi F_k, \quad (4.3)$$

Kako su jedino mjerenja y_k dostupna za umetanje watermarka, aditivnu proceduru umetanja možemo definisati na sljedeći način

$$y_{kw} = y_k + \alpha w_k, \quad (4.4)$$

gdje parametar α služi da kontroliše jačinu umetnutog watermarka. Watermark w_k je kreiran kao pseudo-slučajna sekvenca, dok se dužina watermarka u ovom slučaju određuje u skladu sa dužinom vektora mjerenja (broj mjerenja je $M \ll N$). Ovaj dio sistema čini watermarking koder.

Na strani dekodera, watermarkirana mjerenja se koriste za rekonstrukciju kompletne watermarkirane slike. Algoritam koji je korišćen za rekonstrukciju slike iz watermarkiranih mjerenja je TV minimizacioni algoritam. U skladu sa time. Optimizacioni problem je definisan u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} \min_F TV(F_k) \quad \text{subject to } y_k &= \Psi \Phi F_k \\ R_k &= \Psi F_k \end{aligned} \quad (4.5)$$

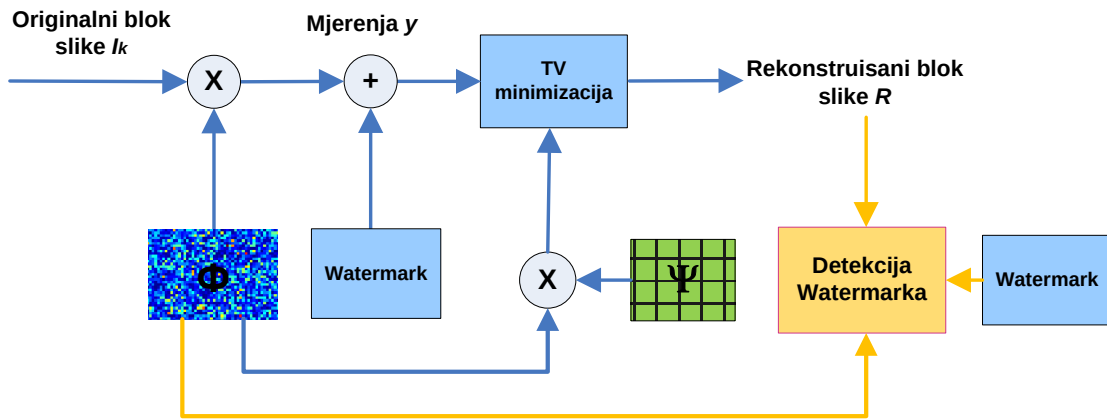
gdje je R_k rekonstruisani blok slike, dok je parametar totalne varijacije Fourier-ovih koeficijenata dat kao suma amplituda gradijenata u svakoj tački, što se može aproksimirati sljedećim izrazom:

$$TV(F_k) = \sum_{i,j} \|D_{i,j} F_k\|_{\ell_2}, \quad (4.6)$$

Dok se gradijent dobija primjenom sljedeće formule:

$$D_{i,j}F_k = \begin{bmatrix} F_k(i+1, j) - F_k(i, j) \\ F_k(i, j+1) - F_k(i, j) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Nešto konkretnija šema predloženog postupka koji obuhvata komprimovano očitavanje signala (uzimanje slučajnih mjerenja pomoću matrice odnosno procesa Φ), zatim aditivno umetanje skaliranog watermarka, TV minimizacija procedura za rekonstrukciju blokova slike koja uključuje proizvod matrica Φ i Ψ , kao i detekcija watermarka kao posljednji korak nakon rekonstrukcije prikazani su na Slici 4.2.



Slika 4.2. Detaljna šema CS watermarking procedure

4.1.1 Detekcija watermarka

Procedura detekcije watermarka je obezbijedena korišćenjem standardnog korelacionog detektora koji se primjenjuje na koeficijente u koje je watermark umetnut. Odziv detektora se dakle dobija kao rezultat korelacije watermarkirane sekvence i samog watermarka:

$$Det(w) = \sum_i y_{iw} w_i, \quad (4.8)$$

gdje su sa y_{iw} označeni koeficijenti watermarkirane sekvence, a sa w_i koeficijenti watermarka. Vrijednost dobijena na izlazu korelacionog detektora za slučaj posjedovanja pravog ključa - watermarka se poredi sa vrijednostima koje daje detektor za slučaj proizvoljnih pogrešnih ključeva. Shodno tome, za svaki pogrešan ključ p treba da važi:

$$Det(w) > Det(p).$$

Za mjeru kvaliteta detekcije korišćen je indeks detektibilnosti, koji se koristi u teoriji detekcije signala. Najprije se izračunaju odzivi detektora za prave ključeve – watermark sekvence, a zatim i za veliki broj pogrešnih ključeva, kako bi se statistički pokazala vjerodostojnost detekcije. Zatim se računaju srednje vrijednosti odziva detektora za pogrešne i prave ključeve: $\bar{D}(w)$ za razne watermark sekvence i $\bar{D}(p)$ za pogrešne ključeve ili tzv. pogrešne pokušaje. Takođe, računaju se standardne devijacije odziva detektora za prethodno pomenute slučajeve: σ_w^2 za razne watermark sekvence i σ_p^2 za pogrešne pokušaje. Uzimajući u obzire ove parametre, mjera kvaliteta detekcije se može dobiti na sljedeći način:

$$R = \frac{\bar{D}(w) - \bar{D}(p)}{\sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_p^2}}. \quad (4.9)$$

Mjera kvaliteta detekcije R se dalje koristi da se izračuna vjerovatnoća greške detekcije korišćenjem sljedećeg izraza:

$$P_{err}(R) = \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(-\frac{R}{2}\right) + \frac{1}{2}. \quad (4.10)$$

Važno je napomenuti da je tokom detekcije watermarka neophodno znati tačne pozicije mjerenja koje zapravo sadrže informaciju o watermarku. Drugim riječima, prilikom detekcije watermarka neophodno je i prisutvo mjerne matrice Φ_k , koja u ovom slučaju služi kao dodatni sigurnosni ključ. Bez informacije o matrici mjerenja, odnosno o pozicijama mjerenja unutar rekonstruisane watermarkirane slike, watermark nije moguće detektovati.

4.1.2 Eksperimentalni rezultati

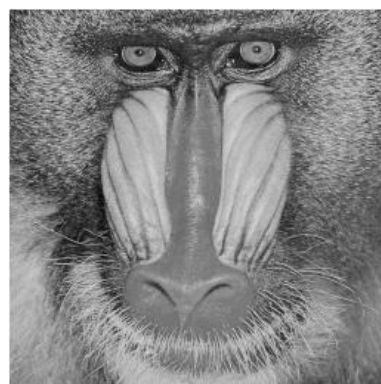
U nastavku su, na primjerima, izložene prednosti predložene watermarking procedure u prisutvu komprimovanog očitavanja. Opisana procedura je primijenjena na blokove slike dimenzija 16×16 . Vektor mjerenja u svakom bloku slike sadrži svega 40% slučajno odabranih koeficijenata slike. Radi jednostavnosti, uzeto je da je mjerna matrica ista u svakom bloku slike, odnosno da je $\Phi_k = \Phi$.



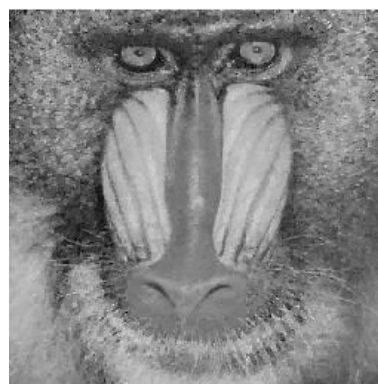
a)



b)



c)



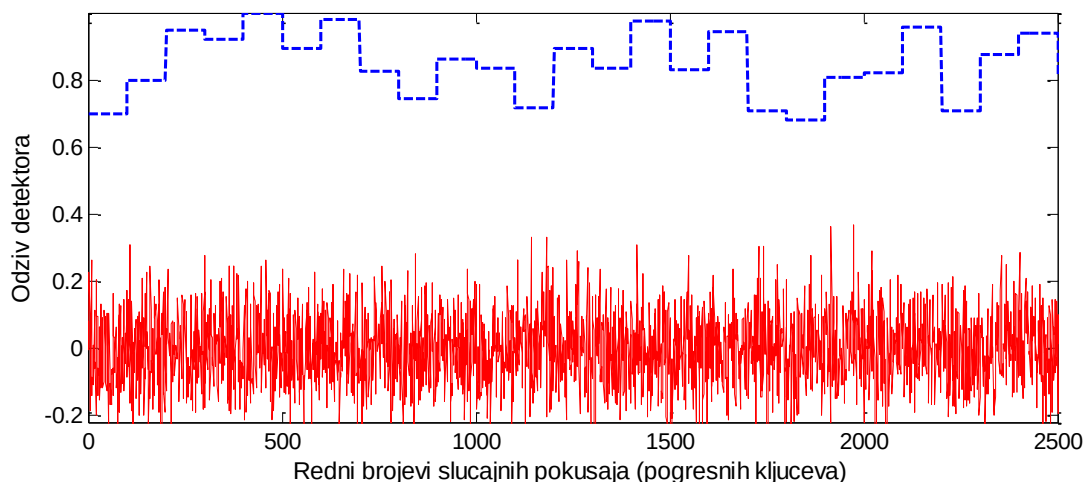
d)

Slika 4.3. a) Originalna slika Lena, b) rekonstruisana i watermarkirana slika Lena, c) originalna slika Baboon, d) rekonstruisana i watermarkirana slika Baboon

Kvalitet rekonstruisane watermarkirane slike je mjeren na osnovu peak signal to noise ratio - PSNR. Rezultantne vrijednosti parametra PSNR za sve testirane slike nakon

watermarkiranja i rekonstrukcije su približno oko 35dB, što ukazuje na dobar kvalitet resultantne slike, pogotovo ako se ima u vidu da je tokom akvizicije slike korišćeno samo 40% od ukupnog broja slučajnih piksela. Originalne i rekonstruisane-watermarkirane test slike Lena i Baboon prikazane su na Slici 4.3. Primijetimo da su rekonstruisane slike zadovoljavajućeg kvaliteta, bez jasno izraženih degradacija u odnosu na originalni sadržaj.

Rezultati detekcije watermark-a su predstavljeni na Slici 4.4.. Testiranja su vršena za 25 realizacija watermarka (25 pravih ključeva umetnutih u mjerenja slike), dok je za svaki watermark kreirano po dodatnih 100 ključeva koji nisu umetnuti u signal već se tretiraju kao slučajni pogrešni pokušaji (pogrešni ključevi). Za svaki pravi ključ (watermark), odziv detektora mora biti znatno iznad odziva na sve pogrešne ključeve kako ne bi došlo do zloupotrebe štićenog sadržaja i nemogućnosti dokazivanja vlasništva nad istim. Postignuta mjere kvaliteta detekcije je $R=6.8$. Ova mjera odgovara veoma maloj vjerovatnoći greške u slučaju detekcije watermarka koja je reda 10^{-6} .



Slika 4.4. Rezultati detekcije watermarka za 25 pravih ključeva i 2500 pogrešnih pokušaja

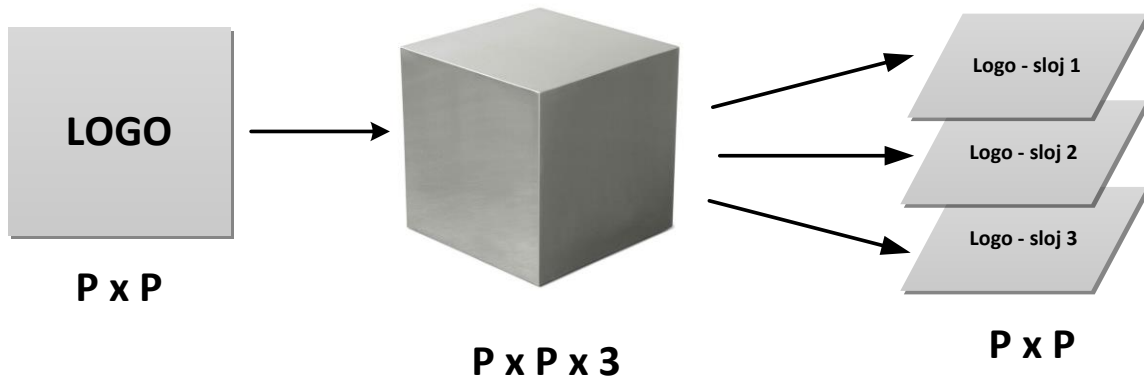
4.2 Watermarking procedura za zaštitu slike zasnovana na Logo watermarku i komprimovanom očitavanju

U nastavku je posmatrana procedura za umetanje watermarka u obliku svojevrsnog logo-a u koeficijente slike koji su dobijeni kao set mjerenja nakon procedure komprimovanog očitavanja. Naime, posmatrajmo slučaj kada se komprimovano očitavanje podataka vrši u transformacionom domenu, u ovom slučaju u DCT domenu. Stoga će umjesto kompletne slike biti dostupan samo mali set DCT koeficijenata, koje nazivamo CS mjerenjima. Kako su to jedini dostupni koeficijenti, umetanje logo-a će biti izvršeno u DCT domenu, a nakon toga će slika biti rekonstruisana korišćenjem jednog od optimizacionih metoda. Umjesto detekcije watermarka koja je vršena u prethodnom slučaju kada je watermark kreiran kao pseudo-slučajna sekvenca, ovdje se vrši ekstrakcija logo-a koja je definisana inverznom procedurom (u odnosu na proceduru umetanja logo-a).

Označimo dostupne DCT koeficijente slike (mjerenja u DCT domenu) u obliku vektora $\mathbf{C}$. U cilju obezbjeđivanja robustnosti predloženog watermarking metoda, logo je kreiran kao binarna slika koja je raspršena kroz nekoliko bit ravni dostupnih mjerenja, tj., koeficijenata slike. Time smo obezbijedili da logo ne bude vidljiv niti u jednoj od bit ravni, te da se ne može jednostavno ukloniti. S obzirom da je logo dvodimenzioni signal, vektor mjerenja $\mathbf{C}$ je najprije potrebno preurediti u kvadratnu matricu $\mathbf{C}_P$ dimenzija $P \times P$ koje odgovaraju dimenzijama logo-a, pri čemu je potrebno obezbijediti da je ukupna dužina vektora slučajnih mjerenja zapravo P^2 . Koeficijenti u okviru kvadratne matrice $\mathbf{C}_P$ su svi predstavljeni uniformno sa istim brojem bita označenim sa B .

Nekoliko bit ravni je selektovano za umetanje logo-a (od ukupno B dostupnih bit ravni). Kako bi se izbjegle ozbiljne degradacije signala, nije preporučljivo koristiti najznačajnije bite, a ujedno ni najmanje značajne iz razloga robusnosti umetnutog watermarka. Stoga se kao optimalno rješenje nameće upotreba srednjih bita, odnosno njima odgovarajućih bit ravni. Nakon odabira bit ravni, neophodno je i logo podijeliti na

isto toliko slojeva i to korišćenjem jedinstvenog ključa (Slika 4.5). Naime, posmatrajmo slučajnu matricu $\mathfrak{R}$ istih dimenzija kao logo $P \times P$. Potrebno je najprije podijeliti ovu matricu u određeni broj nivoa, tako da svaki nivo sadrži samo vrijednosti iz određenog intervala (i pri tome se intervali ne preklapaju). Matematički, ova procedura može biti zapisana na sljedeći način:



Slika 4.5. Proces dekompozicije logoa

$$\begin{aligned}
 L_k(i, j) &= L(i, j) \quad \text{za} \quad \omega_{k-1} < \mathfrak{R}(i, j) < \omega_k \\
 L_k(i, j) &= 0 \quad \text{van intervala} \\
 k &= 1, 2, \dots, b; \quad i = 1, 2, \dots, P; \quad j = 1, 2, \dots, P
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

pri čemu je sa L_k označen k -ti sloj logoa L , b je broj slojeva a ujedno i broj selektovanih bit ravni za umetanje logo-a, dok su granične vrijednosti opsega ω_k računane kao:

$$\omega_k = k \frac{\max(\mathfrak{R}) - \min(\mathfrak{R})}{b}.$$

Matrica mjerenja odnosno DCT koeficijenata $\mathbf{C}_p$ je zatim posmatrana kroz b bit ravni:

$$\mathbf{C}_p(k \text{ bit}) = \mathbf{C}_{pk}.$$

Slojevi logoa L_k se umeću u bit ravni DCT koeficijenata $\mathbf{C}_p$ na sljedeći način:

$$C_{pk}(i, j) = \begin{cases} L_k(i, j) & \text{za } L_k(i, j) = 1 \\ C_{pk}(i, j) & \text{ostalo} \end{cases}. \quad (4.12)$$

Primijetimo da će samo biti $C_{pk}(i, j) = "0"$ biti promijenjeni u vrijednost "1" u slučajevima kada je $L_k(i, j) = "1"$. Na taj način, logo neće u potpunosti promijeniti bit ravni u koje se umeće, čime smo izbjegli vidljivu degradaciju slike.

Nakon procedure umetanja logoa u CS mjerenja, vrši se rekonstrukcija slike na osnovu mjerenja primjenom algoritma TV minimizacije. Naime, minimizacioni problem je definisan kao:

$$\min_S TV(S) \text{ tako da važi } C = \Psi S, \quad (4.13)$$

gdje je kao transformacioni domen korišćen 2D DCT domen. U diskretnoj formi, funkcija totalne varijacije koeficijenata može se definisati kao:

$$TV(S) = \sum_{i,j} \sqrt{(\nabla_S^h)^2 + (\nabla_S^v)^2}, \quad (4.14)$$

pri čemu su razlike po vrstama i kolonama slike definisane kao:

$$\begin{aligned} \nabla_S^h &= s_{i+1,j} - s_{i,j} \\ \nabla_S^v &= s_{i,j+1} - s_{i,j} \end{aligned}. \quad (4.15)$$

4.2.1 Ekstrakcija logoa

Ekstrakcija logoa se vrši na osnovu procedure koja je inverzna u odnosu na proceduru umetanja logoa. Prilikom ekstrakcije, selektuje se set mjerenja C_p koji se preslože u kvadratnu matricu. Nakon toga, posmatraju se b bit ravni u koje je umetnut watermark, i ekstrakcija se vrši po sljedećem principu:

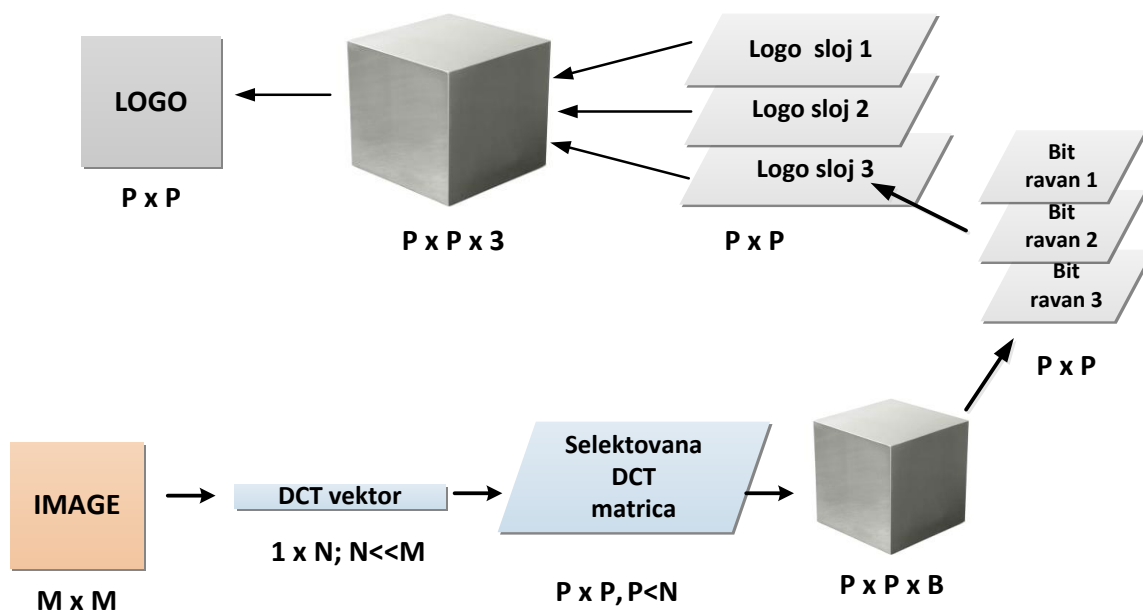
$$F_k(i, j) = \begin{cases} C_{pk}(i, j) & \text{za } L_k(i, j) = 1 \\ 0 & \text{ostalo} \end{cases} \quad (4.16)$$

gdje je: $L_k(i, j) = L(i, j)$ za $\omega_{k-1} < \Re(i, j) < \omega_k$, sa indeksima $k=1, \dots, b$.

Svi parametri imaju isto značenje kao u prethodnom dijelu posvećenom umetanju watermarka. Dodatni zaštitni ključ koji obezbjeđuje sigurnost watermarking procedure je i poznavanje seta slučajnih CS mjerenja koja su korišćena za umetanje logoa. Naime, ukoliko bi bio javno poznat način odabira slučajnih koeficijenata za umetanje/ekstrakciju logoa, tada bi on mogao biti potpuno rekonstruisan na osnovu bit-ravni selektovanih CS mjerenja:

$$F_k(i, j) \equiv L_k(i, j) \text{ ako je } C_{pk}(i, j) \in V_Q,$$

gdje V_Q označava vektor mjerenja definisan slučajnom funkcijom Q , dok je $(\equiv)$ operator identiteta. Jedan primjer ekstrakcije logoa je dat na Slici 4.6.



Slika 4.6. Blok šema ekstrakcije logoa

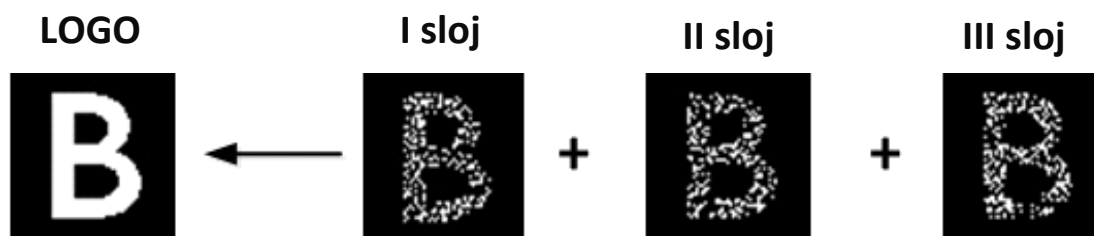
4.2.2 CS kao atak na watermarking proceduru i detekciju watermarka

Pretpostavimo da je logo umetnut u nekoliko bit-ravni selektovanih koeficijenata C_p i da se može efikasno rekonstruisati (ekstrahovati). U svijetlu teorije komprimovanog očitavanja, interesantno je posmatrati uticaj simulacije dodatnog CS scenarija koji bi igrao ulogu ataka na watermarking proceduru.

Stoga, selektujemo set od Q koeficijenata iz originalne slike koji će imati ulogu CS mjerenja. Zatim se rekonstruiše slika ponavljajući ranije opisanu proceduru za rekonstrukciju zasnovanu na TV algoritmu i 2D DCT domenu. Nakon rekonstrukcije, koeficijenti slike su modifikovani, te će uspješnost rezultata ekstrakcije logoa zavisiti od broja dostupnih odbiraka tj. mjerenja Q korišćenih prilikom realizacije CS ataka.

4.2.3 Eksperimentalni rezultati

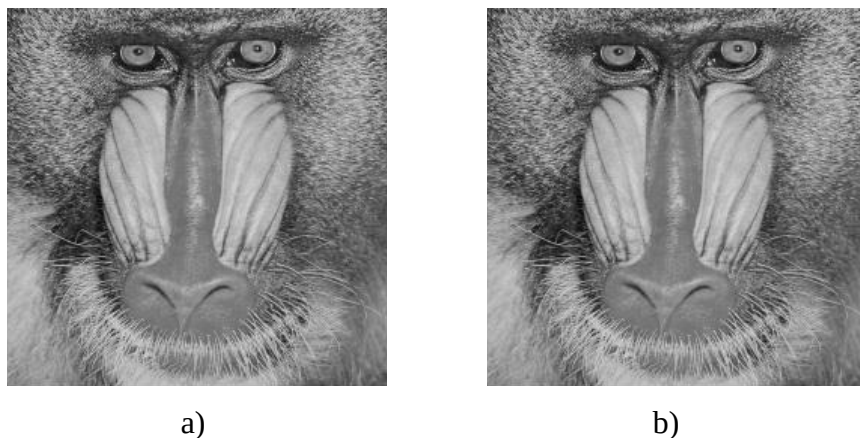
Primjer 1: Logo je podijeljen na tri nepreklapajuća sloja i prikazan je na Slici 4.7.



Slika 4.7. Watermark - Logo podijeljen na tri sloja

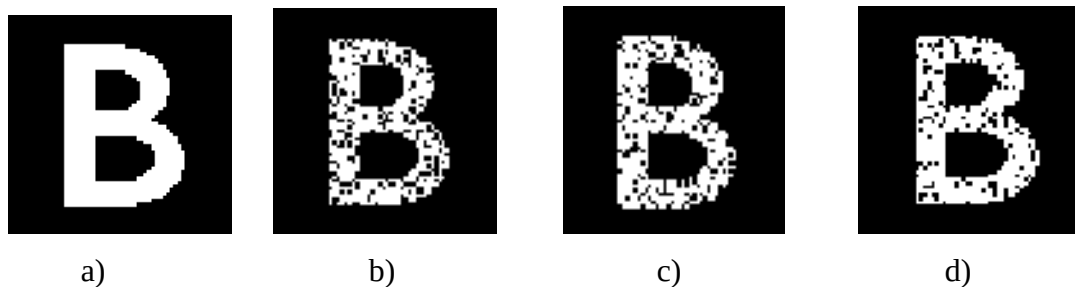
CS mjerenja su selektovana slučajnom procedurom iz cijele slike tako da imamo minimum 4000 nisko-frekvencijskih komponenti, dok se ostali koeficijenti uzimaju slučajnim odabirom iz preostalih regiona slike. Ukupan broj mjerenja je 50% od ukupnog broja koeficijenata cijele slike. Logo je umetnut u prvih 3600 koeficijenata, što je svega oko 10% koeficijenata slike (dimenzije logoa su 60x60, dok su za umetanje logoa korišćene srednje bit ravni $b=4, 5$ i 6 od ukupnog broja ravni $B=10$). Originalna i rekonstruisana slika “Baboon” prikazane su na Slici 4.8. Nakon primjene algoritma za rekonstrukciju slike na osnovu 50% mjerenja, logo je ekstraktovan iz rekonstruisane slike na osnovu poznatih pozicija CS mjerenja. Prilikom rekonstrukcije slike ostvaren je PSNR=35dB. Rekonstruisani logo je identičan originalnom (Slika 4.9a).

Posmatrajmo sada slučaj kada je watermarkirana slika izložena CS ataku i testirajmo uspješnost ekstrakcije watermarka u ovom slučaju. Naime, pretpostavimo ponovo da je dostupan određeni set slučajnih koeficijenata, na primjer 50%, 60% ili 70%, dok su ostali koeficijenti odbačeni i time nedostupni.



Slika. 4.8. Originalna i watermarkirana slika “Baboon”

Zatim se za svaki od posmatranih slučajeva primijeni TV rekonstrukcioni algoritam, a nakon toga iz rekonstruisane slike se rekonstruiše logo. Rezultati rekonstrukcije logoa nakon CS ataka za 50%, 60% i 70% mjerenja su prikazani na Slikama 4.9b, 4.9c i 4.9d. Imajući u vidu da rekonstruisana slika nakon CS ataka, sadrži manje informacija o logou jer je određeni procenat koeficijenata odbačen pa potom rekonstruisan, gubeći pri tome neke od umetnutih piksela logoa, možemo zaključiti da logo neće biti moguće perfektno rekonstruisati. Dakle, u ovom slučaju, zbog specifičnosti prirode logoa kao watermarka, jedan dio informacije o logou se gubi ali je logo i dalje čitljiv i upotrebljiv u svrhu zaštite sadržaja.



Slika 4.9. Rezultati rekonstrukcije logoa: a) bez CS ataka, b) nakon CS ataka sa 50% merenja, c) nakon CS ataka sa 60% mjerenja, d) nakon CS attaka sa 70% mjerenja

4.3 Watermarking procedura za zaštitu MR slika

U ovom dijelu je predložena watermarking procedura za zaštitu biomedicinskih slika dobijenih postupkom magnetne rezonanse (u nastavku MR slike). Watermarking MR slika uglavnom ima za cilj da se postigne bezbjednost sadržaja slike. Takođe, watermarking MR slika omogućava bezbjedno slanje između eksperata u cilju bolje i kvalitetnije dijagnostike. Vođenje medicinske evidencije o pacijentima i čuvanje njihovih informacija je važno u medicinskoj administraciji. Korišćenje Interneta za prenos ovakvih podataka, zahtijeva korišćenje algoritama za zaštitu podataka. U tom smislu, watermarking biomedicinskih podataka je danas postao dobra praksa u svijetu.

Za razliku od drugih tipova podataka, biomedicinske slike se koriste u dijagnostici i stoga moraju biti izuzetnog kvaliteta. Ovo dalje znači da watermark ne smije da izazove bilo kakvu degradaciju sadržaja, čime sami postupak dizajniranja procedure watermarkinga postaje zahtjevniji u poređenju sa standardnim procedurama za multimedijalne podatke. U isto vrijeme, umetnuti watermark treba da bude robustan na različite tipove ataka kao što su šumovi i filtriranje. Ovdje je posebna pažnja posvećena novom tipu ataka, tzv. CS atak, koji podrazumijeva slučajno pododabiranje watermarkirane slike i ponovna rekonstrukcija u punoj rezoluciji koja bi potencijalno mogla da uništi watermark ili da utiče na njegovu detektibilnost. Takođe, CS koncept je iskorišćen i u samom umetanju watermarka uštićeni sadržaj, jer je pretpostavka da uređaj ne snima kompletnu sliku već samo određeni broj projekcija na osnovu kojih je potrebno rekonstruisati sliku u cjelosti. Tim se postiže smanjenje izloženosti pacijenta zračenju, kao i manje trošenje samih uređaja za akviziciju biomedicinskih slika.

4.3.1 Procedura umetanja watermarka

Kako je ranije napomenuto, medicinski sadržaji su mnogo osjetljiviji na umetanje watermarka u poređenju sa drugim podacima, imajući u vidu da je očuvanje visokog kvaliteta informacije od izuzetne važnosti. MR slike se obično snimaju u 2D DFT

domenu, na način da svaka snimljena linija u DFT ravni predstavlja jednu od projekcija objekta koji se snima. Na osnovu snimljenih projekcija vrši se rekonstrukcija kompletne MR slike posebnim algoritmima. Očigledno, što je više projekcija to je rekonstrukcija lakša i sa boljim kvalitetom. Međutim, veći broj snimljenih projekcija znači veći utrošak energije, senzora, lampica i što je mnogo važnije veće izlaganje pacijenta zračenju. Stoga je jedna od primarnih aplikacija CS algoritama rekonstrukcija MR slika na osnovu malog broja snimljenih linija tj. projekcija. Direktnom inverzijom iz 2D DFT domena slika dobijena na osnovu malog broja projekcija bila bi lošeg kvaliteta, ali upotrebom CS rekonstrukcionih algoritama mogu se postići zavidni rezultati.

Kako su MR slike snimane u 2D DFT domenu, to ćemo ovaj domen iskoristiti i za umetanje watermarka. Naime, ideja je da se watermark umeće u štićeni sadržaj prilikom akvizije pojedinačnih projekcija i to duž tih projekcija u DFT domenu. Dakle, postupak umetanja watermarka bi se mogao opisati kroz sljedeće korake:

- 1) Dostupne su same pojedine linije (projekcije) u okviru 2D DFT domena, koje su definisane radijalnom maskom Λ .
- 2) Najznačajnija informacija slike je koncentrisana oko koordinatnog početka u 2D DFT domenu (niskofrekventni centralni dio DFT ravni), te se taj dio izuzima iz watermarkiranja kako se ne bi narušio kvalitet slike.
- 3) Watermark se umeće duž dostupnih radijalnih linija (projekcija) čije su pozicije određene maskom:

$$DFT_w^{2D}(\Lambda) = DFT^{2D}(\Lambda) + \alpha w, \quad (4.17)$$

gdje DFT predstavlja matricu 2D DFT koeficijenata, parametar α kontroliše jačinu watermarka, dok je w watermark u matričnom obliku koji se formira kao:

$$w = \Theta \Lambda Y, \quad (4.18)$$

Pri tome je Λ radijalna maska, Y je matrica slučajnih brojeva, dok je Θ matrica koja sadrži nulte vrijednosti u centralnom regionu oko koordinatnog početka 2D DFT ravni.

- 4) U sljedećem koraku se vrši rekonstrukcija MR slike na bazi watermarkiranih projekcija. Za rekonstrukciju slike korišćen je TwIST algoritam, koji obezbjeđuje visok kvalitet rekonstruisane MR slike. Optimizacioni problem je postavljen na sljedeći način :

$$\arg \min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_{l_2}^2 + \lambda \text{TV}(\mathbf{X}), \quad (4.19)$$

Gdje je vektor $\mathbf{y}$ vektor koeficijenata 2D Fourier-ove transformacije koji odgovaraju nenultim koeficijentima iz maske, $\mathbf{X}$ je signal koji se estimira, $\mathbf{A}$ je CS matrica, λ je regularizacioni parametar i obično se bira da bude pozitivna, realna vrijednost, dok je

funkcija $\text{TV}(\mathbf{X})$ definisana kao $\text{TV}(\mathbf{X}) = \sum_{i,j} \sqrt{(\nabla_{\mathbf{X}}^h)^2 + (\nabla_{\mathbf{X}}^v)^2}$.

Napomenimo da se jačina umetnutog watermarka podešava na bazi kompromisa između željenog kvaliteta rezultatne slike i mogućnosti detekcije watermarka: veće α znači bolju detekciju ali lošiji kvalitet watermarkirane slike, i obratno.

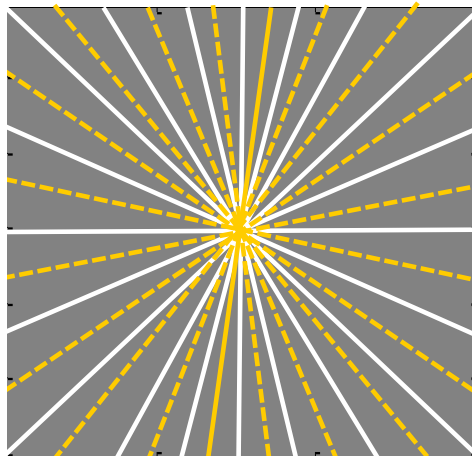
Detekcija watermarka se obavlja korišćenjem standardnog korelatora primijenjenog na 2D DFT koeficijente:

$$\text{Det}_{\text{wat}} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{ij} \text{DFT}_{w_{ij}}, \quad (4.20)$$

gdje su M i N dimenzije slike, i pri tome kako je već ranije naglašeno, za svaki slučajni signal p , koji nije watermark umetnut u sadržaj, treba da važi:

$$\text{Det}_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{ij} \text{DFT}_{w_{ij}} < \text{Det}_{\text{wat}}. \quad (4.21)$$

Pretpostavka je da su svi signali p koji predstavljaju pogrešne ključeve prilikom detekcije watermarka, kreirani na osnovu iste procedure kao i sam watermark. Detekcija watermarka daje zadovoljavajuće rezultate što je pokazano u eksperimentalnom dijelu. Međutim, pokazuje se da ovakav watermark može biti jednostavno uklonjen ukoliko se nad watermarkiranom slikom, ponovi postupak komprimovanog očitavanja: slika se transformiše u 2D DFT domen, izaberu se slučajne radijalne projekcije izbjegavajući one koje sadrže watermark i na osnovu njih se opet rekonstruiše slika. Takva slika više neće sadržati informacije o watermarku. Naime, radijalna maska Λ sadrži mali broj ekvidistantnih radijalnih linija, tako da je jednostavno naći novu kombinaciju radijalnih linija koja više neće imati nikakvih informacija o watermarku. Bijele linije na Slici 4.10 ilustruju watermarkirane linije u 2D DFT domenu, dok žute isprekidane linije ilustruju novi set radijalnih linija koje ne sadrže watermark. Ukoliko se ovaj novi set linija koristi za rekonstrukciju MR slike korišćenjem koeficijenata iz 2D DFT koji leže na linijama, watermark neće biti više prisutan u rekonstruisanoj MR slici. U cilju prevazilaženja ovog potencijalnog problema, u nastavku je predložena procedura za raspršivanje watermarka na veći broj radijalnih linija.



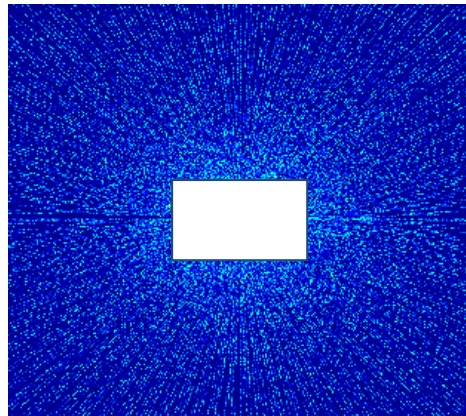
Slika 4.10: Bijele linije predstavljaju linije korišćene za umetanje watermarka i Cs rekonstrukciju, žute linije ne sadrže watermark i mogu se iskoristiti za ponovno rekonstruisanje slike koja više neće sadržati watermark

4.3.2 Procedura za raspršivanje watermarka

Proces raspršivanja watermarka sa glavnih radijalnih linija definisanih maskom Λ duž obližnjih linija treba da omogući pouzdaniju detekciju watermarka i da obezbijedi robustnost watermarka bez obzira na raspored linija maske koje su korišćene za umetanje. U tu svrhu, watermark koji je primarno kreiran sa određenim brojem linija definisanim maskom Λ , koje ćemo nazvati “linije nosioci” watermarka, je potrebno preslikati na veći broj W obližnjih linija, pri čemu je snaga watermarka na svakoj liniji W puta manja u odnosu na početne “linije nosioce”. Shodno tome, ukupan broj linija koje sadrže neku informaciju o watermarku u 2D DFT ravni je sada W puta veća. Nova raspršena forma watermarka može se definisati na sljedeći način:

$$w_S = \frac{1}{W} \sum_{k=1}^W \Lambda_k(l, \theta) \cdot w, \quad (4.22)$$

gdje w_S označava novi watermark, $\Lambda_k(l, \theta)$ je radijalna maska sa W linija, dok θ označava ugao rotacije korišćen za pomjeranje “linija nosilaca” i raspršivanje watermarka. Umetanje watermarka se vrši u skladu sa prethodno definisanom aditivnom procedurom. Nova forma raspršeng watermarka je prikazana na Slici 4.11.

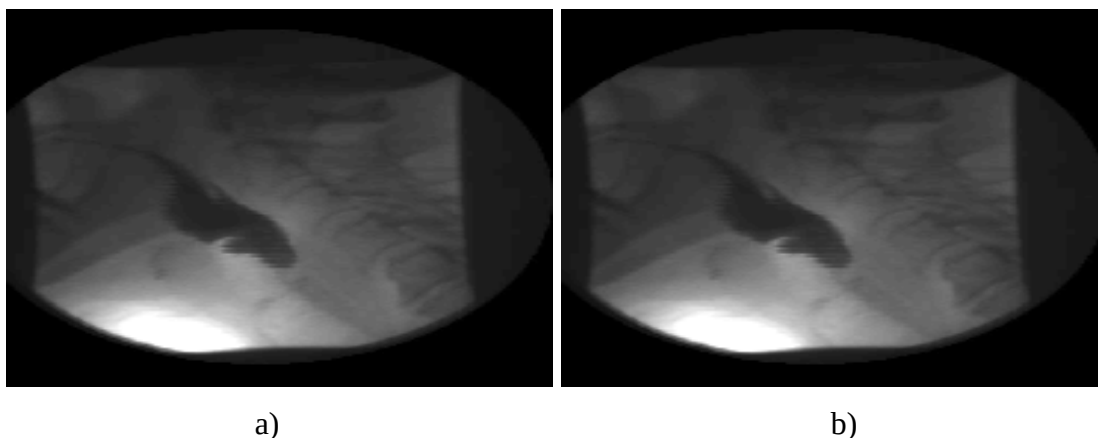


Slika 4.11: Raspršivanje watermarka

4.3.3 Eksperimentalni rezultati

Primjer 1: Watermark u 48-linija

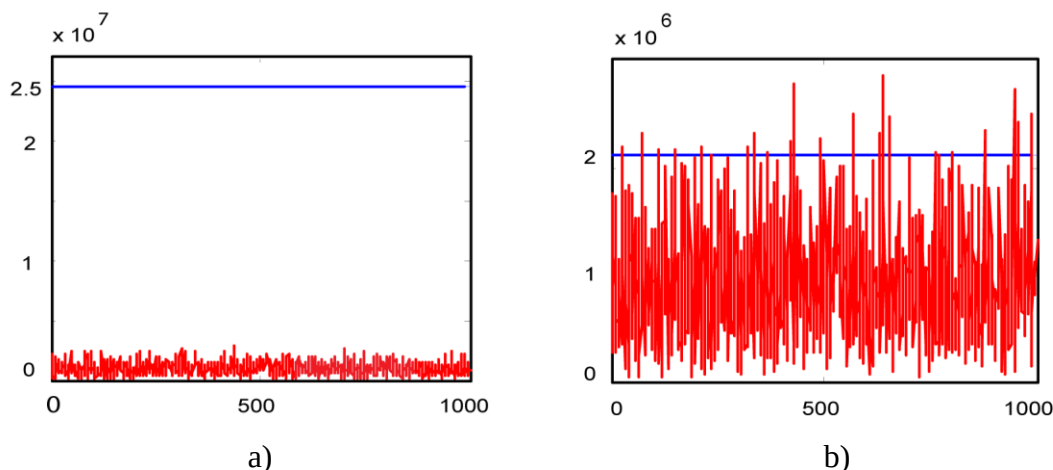
Posmatrajmo MR sliku dimenzija 512×512 (Slika 4.12). U cilju umetanja watermarka, formirana je radijalna maska, a koeficijenti iz 2D DFT domena slike koji se nalaze duž linija radijalne maske su selektovani za umetanje watermarka. Maska sadrži 48 linija. Parametar jačine watermarka koji je korišćen prilikom aditivnog umetanja je $\alpha=1000$.



Slika 4.12. a) Originalna slika; b) Watermarkirana slika

2D DFT koeficijenti koji se nalaze u centru 2D DFT ravni (50×50 region) nisu watermarkirani da bi se izbjegla bilo kakva iole vidljiva degradacija kvaliteta MR slike (Slika 4.11). Koeficijenti na linijama u 2D DFT ravni su takođe korišćeni kao CS mjerenja, na osnovu kojih je rekonstruisana kompletna slika korišćenjem TwIST algoritma. Watermarkirana/rekonstruisana slika je prikazana na Slici 4.12. Možemo primijetiti da watermark nije vidljiv u okviru MR slike, kao i da nije izazvao smanjenje kvaliteta u odnosu na originalnu sliku. Detekcija watermarka je testirana korišćenjem 1000 pogrešnih pokušaja (ključeva), a odzivi detektora su prikazani na Slici 4.13. Ujedno, posmatrajmo odzive detektora ukoliko bismo koristili nekih drugih 48 linija iz 2D DFT ravni (maska je rotirana za neki proizvoljni ugao u okviru ravni). Odzivi

detektora će biti značajno degradirani, odnosno u ovom slučaju nemamo pouzdanu detekciju watermarka, Slika (watermark nije detektibilan, jer je velika vjerojatnoća da nijedna zarotirana linija ne sadrži informacije o watermarku).

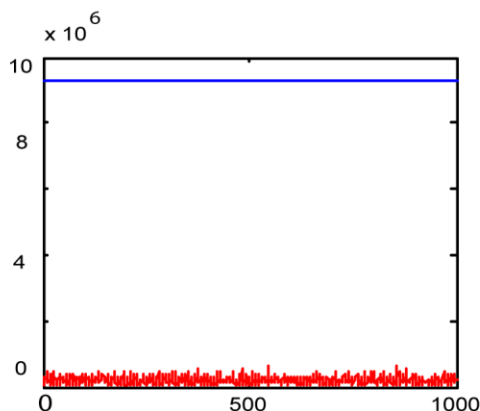


Slika 4.13. a) Odziv detektora za watermark kreiran duž 48 radijalnih linija i 1000 pogrešnih ključeva (crvenom bojom); b) odzivi detektora za radijalnu masku sa 48 linija pomjerenu za određeni ugao (plavom linijom je označen odziv za watermark, crvenom bojom su označeni pogrešni pokušaji). Horizontalna osa su redni brojevi pokušaja, vertikalna osa je veličina odziva detektora

Primjer 2: Raspršivanje watermarka u štićenom sadržaju

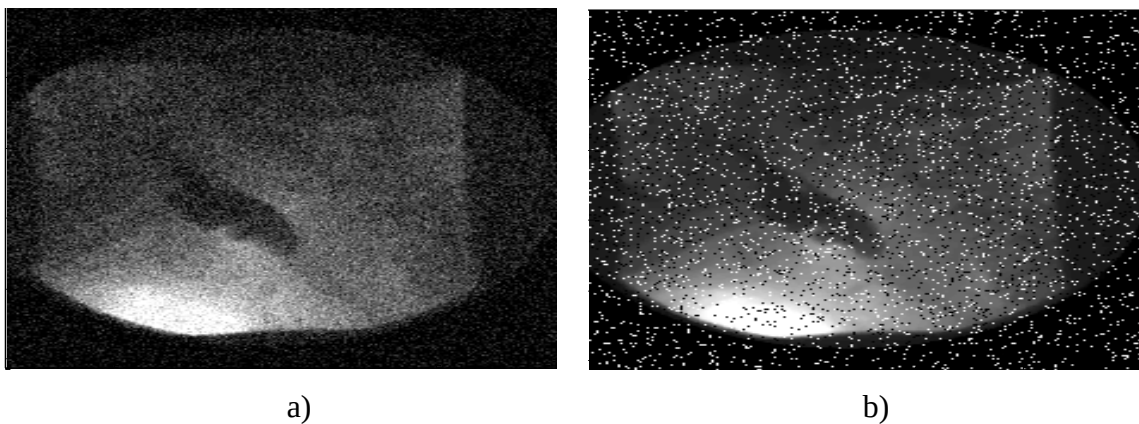
U cilju obezbjeđivanja detekcije watermarka čak u slučaju kada bi se maska sa 48- "linija nosilaca" rotirala za neki proizvoljni ugao, watermark je raspršen na susjedne linije, tako što je sa primarno umetnutih pozicija, svaka linija raspšena na 4 susjedne linije, od kojih svaka sadrži 1/5 umetnutog watermarka. Pri tome, raspršivanje watermarka ne utiče na kvalitet slike. Watermarkirana slika se u cilju testiranja ponovo izlaže proceduri komprimovanog očitavanja u 2D DFT domenu i rekonstrukciji, odnosno tzv. CS ataku. Isti broj radijalnih linija je korišćen za rekonstrukciju (48 linija), ali su linije uzimane sa različitih pozicija. Na Slici 4.14 prikazan je rezultat detekcije za watermark i 1000 pogrešnih pokušaja. Na osnovu razlike između odziva na pravi i

pogrešne ključeve, možemo zaključiti da je detekcija veoma uspješna čak i nakon CS ataka.



Slika 4.14. Odzivi detektora za novi raspršeni watermark i proizvoljno izabranu masku sa 48-linija (plavom bojom je obelježen odziv na watermark, crvenom bojom su obelježeni odzivi na pogrešne pokušaje).

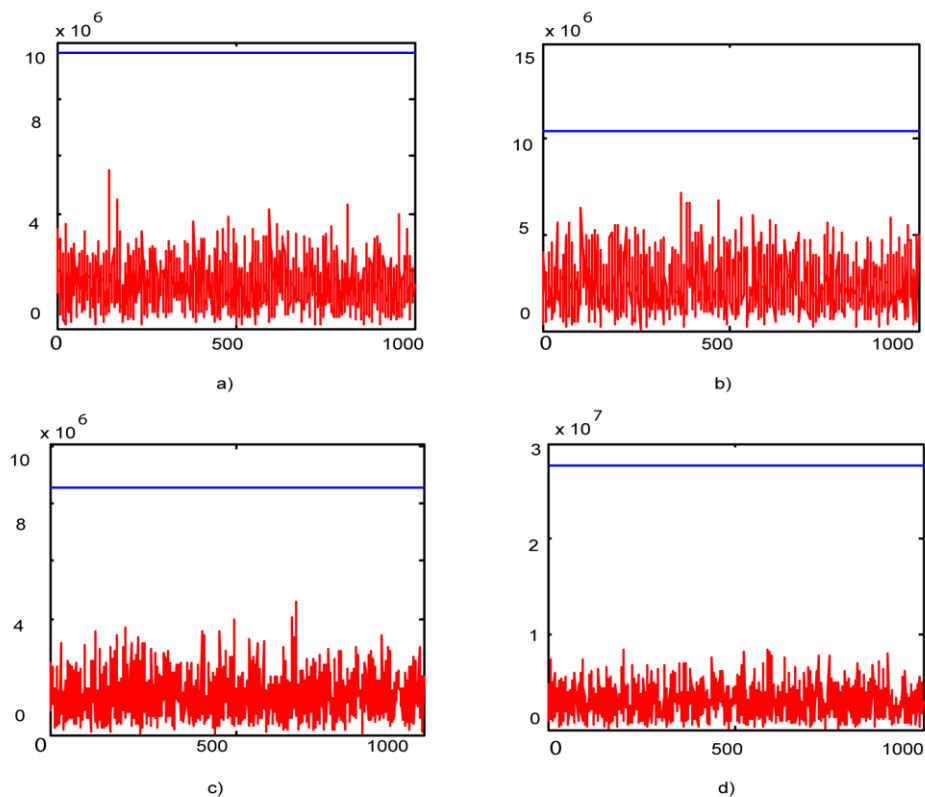
U nastavku je testirana robustnost watermarka na različite tipove ataka: Gauss-ov šum, impulsni šum, median filter i JPEG kompresija. U cilju ilustracije jačine primijenjenih ataka, slike sa Gauss-ovim i impulsnim šumom su prikazane na Slici 4.15.



Slika 4.15. Test slika zahvaćena šumom: a) Gauss-ov, b) impulsni šum

Čak i u slučaju ovako izraženih ataka, watermark može biti uspješno detektovan. Odziv detektora za Gauss-ov i impulsni šum su prikazani na Slikama 4.16a i 4.16b. Takođe,

odzivi detektora su mjereni i za slučaj primjene median filtra i JPEG kompresije. U oba slučaja, ostvarena je uspješna detekcija watermarka, što je pokazano na slikama 4.16c i 4.16d, respektivno.



Slika 4.16. Odzivi detektora na atake: a) Gauss-ov šum; b) impulsni šum; c) median filter; d) JPEG kompresija sa faktorom 40%. Plavom bojom označen je odziv na pravi ključ - watermark, crvenom bojom označeni su odzivi na 1000 pogrešnih ključeva

4.4 Analiza robustnosti pseudo-slučajnog watermarka u DCT domenu

S obzirom da oblast komprimovanog očitavanja mjerenja, te rekonstrukcije signala na osnovu malog broja dostupnih odbiraka, otvara potpuno nove perspektive u svim segmentima digitalne obrade podataka uključujući i digitalnu zaštitu podataka, posebna pažnja je posvećena analizi tzv. CS ataka, koji smo pominjali u prethodnim segmentima rada. Naime, u literaturi posvećenoj zaštiti podataka, obično se kao ataci javljaju razni tipovi šumova, primjena različitih filtara, kompresionih algoritama i slično. Međutim, vidjeli smo kroz prethodno izlaganje, da CS omogućava kompletnu rekonstrukciju signala na osnovu malog slučajno odabranog seta odbiraka, te da potencijalno u okviru tog seta neće biti dovoljno informacija za detekciju watermarka nakon rekonstrukcije. Drugim riječima, CS rekonstrukcija će omogućiti da povratimo koeficijente slike, ali ne i watermark u cjelosti, što znači da će CS rekonstrukcija uticati kao atak otežavajući nam detekciju watermarka.

Posmatrana je aditivna watermarking procedura za zaštitu slike u DCT domenu (veoma slični zaključci su primjenljivi i na DFT domen), primjenjujući umetanje watermarka u 8×8 blokove DCT koeficijenata slike:

$$DCT_w = DCT + \alpha w, \quad (4.23)$$

gdje su DCT originalni DCT koeficijenti, DCT_w su watermarkirani DCT koeficijenti, α definiše jačinu watermarka w kreiranog kao pseudo-slučajna sekvenca. Samo srednje-frekvencijski koeficijenti blokova 8×8 su korišćeni za umetanje watermarka kako bi se postigao kompromis između neperceptibilnosti watermarka i robustnosti. Procedura detekcije je vršena korišćenjem standardnog korelatora.

Slijepa detekcija watermarka je postignuta korišćenjem standardnog korelatora, pri čemu je pretpostavljena Gauss-ova funkcija raspodjele DCT koeficijenata:

$$D = \sum_{i=L+1}^{L+K} w_i DCT_{w_i}. \quad (4.24)$$

Za mjerenje uspješnosti detekcije watermarka opet je korišćena mjera kvaliteta detekcije:

$$R = \frac{\bar{D}(w) - \bar{D}(p)}{\sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_p^2}}. \quad (4.25)$$

gdje su srednje vrijednosti odziva detektora za pogrešne i prave ključeve $\bar{D}(w)$ i $\bar{D}(p)$, dok su standardne devijacije odziva date u vidu promjenljivih: σ_w^2 za razne watermark sekvence i σ_p^2 za pogrešne pokušaje.

4.4.1 Analiza watermarking ataka zasnovanog na CS rekonstrukciji slike

Posmatrajmo set mjerenja c koja su dobijena kao kombinacija nisko-frekvencijskih (c_n) i srednje-frekvencijskih (c_s) DCT koeficijenata slike:

$$c = c_n + c_s. \quad (4.26)$$

Naime, DCT koeficijenti su najprije korišćenjem cik-cak skeniranja iz 2D DCT matrice presloženi u vektor. Zatim je selektovan određen broj prvih nisko-frekvencijskih koeficijenata c_n , dok su srednje-frekvencijski koeficijenti c_s (od niskih prema visokim frekvencijama) birani slučajnim putem. Kako je većina energije slike skoncentrisana na niskim frekvencijama određen broj N_1 nisko-frekvencijskih koeficijenata je neophodan da bi se obezbijedio dobar kvalitet rekonstruisane (rezultantne) slike.

Selektovani koeficijenti c su iskorišćeni da se rekonstruiše kompletna slika korišćenjem TV minimizacionog problema i transformacionog vektora b :

$$\min_b TV(b) \text{ tako da važi } v = Ab. \quad (4.27)$$

U zavisnosti od broja mjerenja iz različitih frekvencijskih opsega, zavisiće i učešće watermarka u novodobijenoj (rekonstruisanoj) slici, a time i njegova detektibilnost. Dakle, korišćenjem CS koncepta u mogućnosti smo da na osnovu malog broja selektovanih koeficijenata rekonstruišemo ponovo sliku bez vidljive degradacije kvaliteta, a da pri tome usljed korišćenja malog broja koeficijenata watermark ne bude detektibilan u novoj slici.

4.4.2 Eksperimentalni rezultati

U nastavku je testirana detekcija watermarka u prisustvu CS ataka. Posmatrana je slika dimenzija 256x256. Slika je u potpunosti opisana sa 65536 koeficijenata. Pretpostavimo da je watermark umetnut u koeficijente DCT domena u skladu sa ranije navedenim postupkom. U cilju testiranja CS ataka, formiran je vektor mjerenja korišćenjem određenog broja koeficijenata iz DCT domena. Naime, vektor mjerenja se sastoji iz $N_1 = 5000$ nisko-frekventnih koeficijenata (oko 7% od ukupnog broja DCT koeficijenata posmatrane slike), dok je ostatak koeficijenata selektovan slučajnim putem (N_2 koeficijenata iz srednje-frekvencijskog regiona DCT matrice). Pri tome je da bi se testirala uspješnost detekcije za različit broj CS mjerenja, variran broj srednje-frekvencijskih koeficijenata N_2 , i to od oko 20% do oko 50% ukupnog broja mjerenja. Slika je zatim rekonstruisana nakon CS ataka iz selektovanih koeficijenata korišćenjem TV minimizacije.

U sljedećem koraku je testirana uspješnost detekcije nakon CS ataka (na osnovu rekonstruisane slike). Pri tome je za detekciju korišćen standardni korelator, kao i ranije

definisana mjera kvaliteta detekcije R . Na Slici 4.17 je prikazana originalna i watermarkirana slika "Cameraman", dok je na Slici 4.18 prikazana slika "Cameraman" nakon rekonstrukcije iz selektovanih mjerenja (nakon CS ataka).



a)



b)

Slika 4.17. a) Originalna, b) Watermarkirana slika Cameraman



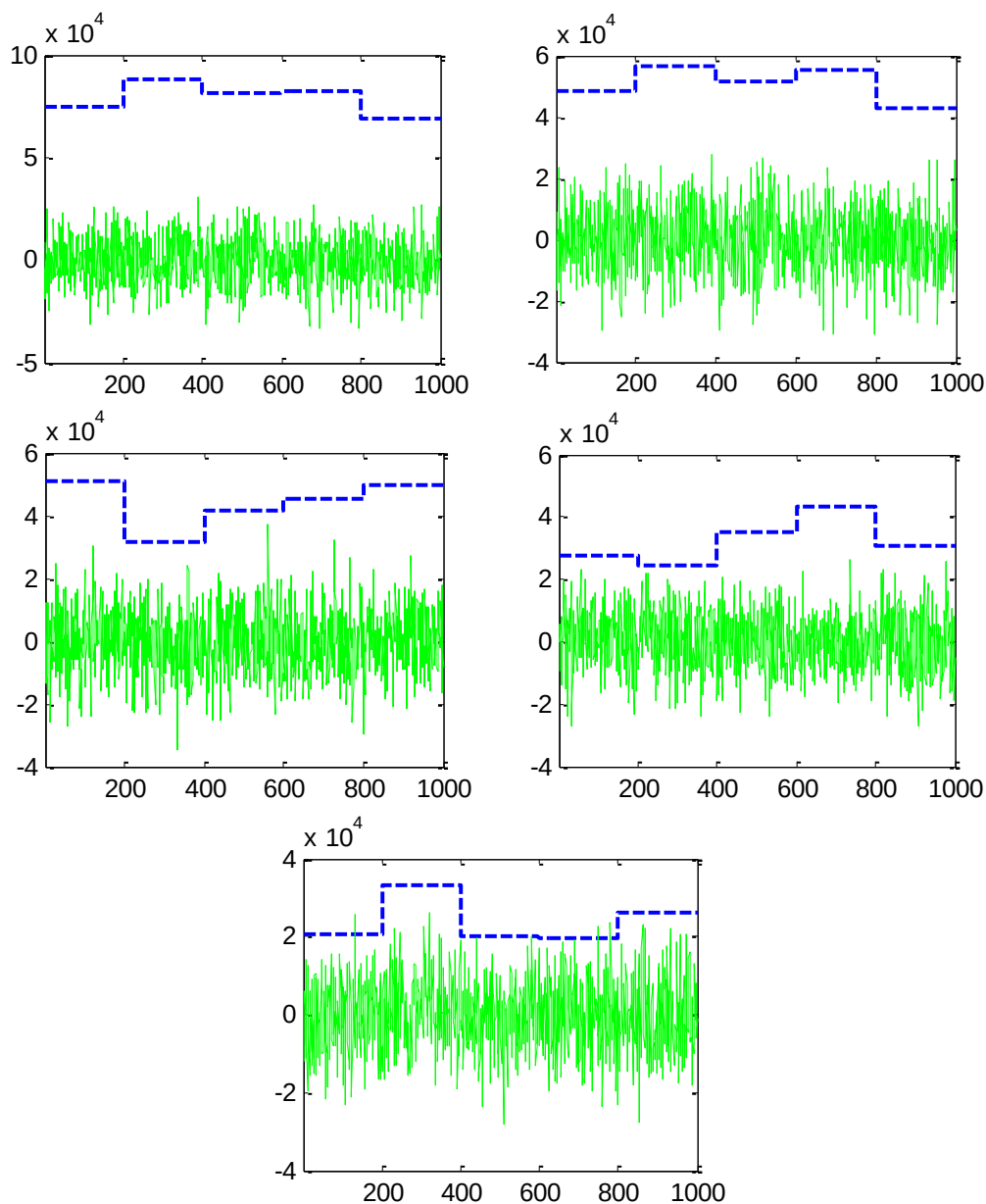
Slika 4.18. Rekonstruisana slika korišćenjem 50% koeficijenata

Kao mjera kvaliteta rekonstruisane slike dobijene na osnovu CS mjerenja računat je PSNR između watermarkirane i rekonstruisane slike. Ostvareni PSNR sa za slučaj rekonstrukcije na osnovu 50% mjerenja je oko 37 dB, što svjedoči o dosta dobrom kvalitetu rekonstruisane slike koji je sličan kvalitetu watermarkirane slike.

Tabela 1: Mjera kvaliteta detekcije prije (R_1) i nakon CS ataka (R_2) za različiti broj mjerenja

Broj mjerenja (%)	N_2	PSNR (dB)	R_1 (bez ataka)	R_2 (CS atak)
21	9000	29.4436	5.2165	2.3291
30	15000	31.9142	5.7638	2.8523
38	20000	33.7379	5.8974	3.6388
49	27000	36.4198	6.2349	4.4934

U Tabeli 1, dati su rezultati detekcije (mjera kvaliteta detekcije R) za različit broj mjerenja selektovanih slučajnim putem iz srednje-frekvencijskog regiona. Primijetimo da ni u jednom slučaju nakon CS ataka nije obezbijedena pouzdana detekcija watermarka o čemu svjedoče vrijednosti mjere R_2 (mjera kvaliteta detekcije koja ima vrijednost ispod 3 svjedoči o neuspjeloj detekciji). Konkretni rezultat detekcije za slučajeve CS mjerenja sumirane u Tabeli 1, prikazani su i na Slici 4.19. Naime, ilustrovani su odzivi detektora na nekoliko pravih i 1000 pogrešnih ključeva (sekvenci). Slučaj odziva detektora u slučaju kada nije primijenjen CS atak je data na Slici 4.19a. Rezultati detekcije nakon CS ataka sa različitim brojem koeficijenata odnosno mjerenja su prikazani na Slikama 4.19b-4.19e. Primijetimo da se odzivi detektora na pogrešne ključeve u slučaju CS ataka znatno približavaju odzivu detektora na prave ključeve (watermark). Takođe, može se zaključiti da za CS atak sa manje od 40% mjerenja pogrešni ključevi sa velikom vjerovatnoćom mogu ostvariti čak i veći odziv detektora u odnosu na watermark (prave ključeve), čime je detekcija watermarka u potpunosti neuspješna.



Slika 4.19. Rezultati detekcije za set pravih ključeva (watermark-ova) označenih plavom bojom i 1000 pogrešnih ključeva označenih zelenom bojom: a) bez ataka, b) nakon CS ataka sa 49% mjerenja, c) nakon CS ataka sa 38% mjerenja, d) nakon CS ataka sa 30% mjerenja, e) nakon CS ataka sa 21% mjerenja

5. Zaključak

CS rekonstrukcija signala i watermarking predstavljaju dvije veoma aktuelne i značajne oblasti u okviru digitalne obrade signala. CS teorija i algoritmi pokazuju da je signal moguće u potpunosti rekonstruisati na osnovu veoma malog broja mjerenja, što je doskoro bilo gotovo nezamislivo. Ovakva mogućnost je otvorila čitav niz pogodnosti za realne aplikacije jer obezbjeđuje značajno smanjenje resursa potrebnih za snimanje, skladištenje i prenos signala. Sa druge strane, u cilju zaštite digitalnih podataka prilikom prenosa komunikacionim linkovima obično se koriste watermarking procedure. Postojeće watermarking procedure imaju na raspolaganju kompletan signal, te postoji velika fleksibilnost prilikom selekcije regiona i koeficijenata koji će biti nosioci watermarka. Obično se odabiraju srednje-frekvencijski regioni koji obezbjeđuju dobar kompromis između neperceptibilnosti i detektibilnosti watermarka.

U CS scenariju situacija je znatno drugačija. Watermark može biti umetnut u dostupna mjerenja signala/slike koja su slučajno odabrana posebnom mjernom procedurom, te je teško primijeniti iste kriterijume kao kod standardnih watermarking procedura nad cjelokupnim sadržajem signala ili slike. Stoga glavna motivacija ovog rada proističe iz potrebe za analizom mogućnosti umetanja watermarka u CS mjerenja, sa posebnim osvrtom na mogućnost detekcije watermark na prijemu nakon što je odrađena rekonstrukcija kompletnog sadržaja.

U radu je predloženo nekoliko modaliteta za watermarking slike korišćenjem samo dostupnih CS mjerenja. Najprije je razmatrana standardna procedura umetanja watermarka kreiranog kao pseudo-slučajna sekvenca i mogućnost detekcije watermarka nakon rekonstrukcije korišćenjem TV minimizacionog algoritma. Ostvareni rezultati pokazuju da je watermark sekvenca u potpunosti detektibilna nakon rekonstrukcije, pri čemu je očuvan perceptualni kvalitet slike.

Druga predložena procedura za zaštitu slike u uslovima komprimovano očitanih mjerenja odnosi se na umetanje watermarka u vidu digitalnog logoa. Logo je podijeljen u nekoliko slojeva i umetnut u isto toliko bit ravni dostupnih mjerenja. Izvršena je rekonstrukcija kompletne slike i pokazano je da je logo moguće nakon toga ekstrahovati u cjelosti, tj. da CS rekonstrukcija ne utiče na umetnuti logo. Međutim, problem se javlja kada se CS primijeni još jednom nad watermarkiranom slikom, na način da se slučajno odabere određeni broj mjerenja i ponovi rekonstrukcija (takozvani CS atak). U ovom slučaju, watermark (logo) biće djelimično do potpuno oštećen što zavisi direktno od broja mjerenja na osnovu kojih je vršena ponovna rekonstrukcija slike. Pokazuje se da je za uspješno identifikovanje logoa potrebno bar 50% mjerenja u ponovljenom CS postupku.

Posebna watermarking procedura je predložena za slučaj biomedicinskih slika (MR slike, rendgenske slike i slično) koje imaju posebne postupke snimanja i za koje CS teorija dobija puni smisao u pogledu manjeg trošenja uređaja i manjeg vremena snimanja. U ovom slučaju uvedene su i dodatne mjere zaštite od CS ataka, primjenom postupka raspršivanja watermarka. Ovaj postupak smanjuje zavisnost uspješnosti detekcije od samih mjerenja i povećava robustnost watermarka na CS atak i druge često korišćene atake. Rezultati pokazuju uspješnost detekcije watermarka čak i u slučaju impulsnog i Gauss-ovog šuma, JPEG kompresije i primjene median filtra.

Na kraju je detaljno analiziran uticaj CS ataka, kroz statistički prikaz rezultata detekcije watermarka za različiti broj dostupnih mjerenja i veliki broj pogrešnih ključeva. U ovoj analizi, a u cilju postizanja većeg stepena robustnosti, korišćena je procedura watermarkinga na mjerenja u frekvencijskom domenu.

Literatura

- [1] F. Hartung and M. Kutter, "Multimedia Watermarking Techniques," *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, no. 7, pp. 1079-1107, July 1999.
- [2] G. Voyatzis, I. Pitas: "A general watermarking framework," *IEEE CGA*, Jan. 1999.
- [3] M. Barni, F. Bartolini, "Watermarking Systems Engineering," Marcel Dekker, Inc., 2004.
- [4] I. J. Cox, M. L. Miller and J. A. Bloom, "Watermarking applications and their properties," *Int. Conference on Information Technology*, Las vegas, 2000.
- [5] M. Barni, F. Bartolini, and A. Piva, "Improved Wavelet-Based Watermarking Through Pixel-Wise Masking," *IEEE Trans. Image processing*, vol. 10, no. 5, 2002, pp.783-791.
- [6] S. Stankovic, I. Orovic, E. Sejdic, "Multimedia Signals and Systems: Basic and Advance Algorithms for Signal Processing," *Springer-Verlag*, New York, 2015
- [7] G. Voyatzis, N. Nikolaidis, I. Pitas: "Digital watermarking: An overview," *Proceedings of European Signal Processing Conference EUSIPCO*, Rhode, Greece, Sept. 1998, pp. 9-12.
- [8] M. Barni, F. Bartolini, and T. Furon, "A general framework for robust watermark security," *Signal Processing*, v.83, p.2069-2084, 2003.
- [9] P. Moulin, "Fundamentals of Watermarking and Data Hiding," *Int. Symp. on Information Theory (ISIT) Tutorial*, Seattle, July 9, 2006.
- [10] S. Stankovic, I. Orovic, B. Mobasseri, M. Chabert, "A Robust Procedure for Image Watermarking based on the Hermite Projection Method," *Automatika - Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications*, vol 53, no 4.
- [11] I. J. Cox, M. L. Miller, "Review of Watermarking and the Importance of Perceptual Modeling," *SPIE-EI'97 - Conf. on Human Vision and Electronic Imaging*, February 1997. Vol. 3016 1997. pp. 92-99.
- [12] D. Kundur and D. Hatzinakos, "Digital watermarking using multiresolution wavelet decomposition," *International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASP)*, Seattle, Washington, USA. (1998); 5: 2969-2972 IEEE.
- [13] D. Kundur and D. Hatzinakos, —A robust digital image watermarking method using wavelet-based fusion, in *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*, vol. 1,1997, pp. 544–547.
- [14] S. Stankovic, I. Orovic, M. Chabert, B. Mobasseri, "Image Watermarking based on the Space/Spatial-Frequency Analysis and Hermite Functions Expansion," *Journal of Electronic Imaging*, vol. 22, no. 1, 013014, 2013.
- [15] D. Kirovski and H. Malvar, "Spread-spectrum Watermarking of Audio Signals," *IEEE Trans. On Signal Processing*, vol. 51, No4, April 2003.

-
- [16] I. Orovic, M. Orlandic, S. Stankovic, "An Image Watermarking Based on the pdf Modeling and Quantization Effects in the Wavelet Domain," *Multimedia Tools and Applications*, pp. 1-17, doi:10.1007/s11042-012-1182-1, 2012.
- [17] S. Stankovic, I. Orovic, N. Zaric, C. Ioana, "Two Dimensional Time-Frequency Analysis based Eigenvalue Decomposition Applied to Image Watermarking," *Multimedia Tools and Applications*, Vol.49, No. 3, pp. 529-543, 2010.
- [18] P. Loo, N. G. Kingsbury, "Digital Watermarking using Complex Wavelets," *Proc. IEEE Conf. on Image Processing*, Vancouver, September 11-13, 2000, paper 3608.
- [19] P. Loo, "Digital Watermarking Using Complex Wavelets," PhD thesis, University of Cambridge, Mar. 2002.
- [20] N. Zaric, I. Orovic, S. Stankovic, "Singular Value Decomposition And Space/Spatial-Frequency Analysis Applied To Digital Watermarking," *Proc. Of the 20th European Signal Processing Conference EUSIPCO-2012*, Vol. 2012, pp.1698-1702, 2012 .
- [21] A. G. Bors, I. Pitas. "Image Watermarking Using DCT Domain Constraints," (ICIP'96) *IEEE International Conference on Image Processing*, September 1996. Vol. III. pp. 231-234.
- [22] S. Stankovic, P. Zogovic, "An application of pdf statistics to optimal watermark detection," *IEEE ISSPIT Conference*, Darmstadt, 2003.
- [23] S. Stankovic, P. Zogovic, I. Djurovic, "A Procedure for Optimal Image Watermark Detection," *32th ICEST 2002*, Nis, pp.186-188, 2002.
- [24] L. Boney, A. H. Tewfik, and K. N. Hamdy, "Digital watermarks for audio signal," *International Conference on Multimedia Computing and Systems*, Hiroshima, Japan 1996, pp. 473-480.
- [25] H. S. Kim, Y. J. Baek, and H. K. Lee "Rotation, Scale and Translation Invariant Watermark using Higher Order Spectra," *Optical Engineering - The Journal of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*, U.S.A., February 2003, Vol. 42, No. 2, pp. 340-349.
- [26] I. Djurovic, S. Stankovic, I. Pitas, "Digital watermarking in the fractional Fourier domain," *Journal of Network and Computer Applications*, Academic Press, Vol.24, No.2, pp.167-173, 2001.
- [27] B. Gunjal and R. Manthalkar, "An Overview Of Transform Domain Robust Digital Image Watermarking Algorithms," *Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences*, vol. 2, no. 1, 2011, pp.37-42.
- [28] S. Stankovic, I. Djurovic, R. Herpers, L.J. Stankovic, "An approach to the optimal watermark detection," *AEUE International Journal of Electronics and Communications*, Vol. 57, No. 5, pp. 355-357, 2003.
- [29] B. Pandhwal, D.S. Chaudhari, "An Overview of Digital Watermarking Techniques," *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)*, vol.3, no.1, 2013.
- [30] S. Stankovic, I. Orovic, N. Zaric, "Robust watermarking procedure based on JPEG-DCT image compression," *Journal of Electronic Imaging*, Vol. 17, No. 4, Page(s) 043001, 2008.
-

- [31] I. J. Cox., J. Killian, T. Leighton, T. Shamoan, "A secure, robust watermark for multimedia," in *Workshop on Information Hiding*, Newton Institute, University of Cambridge, May 1996.
- [32] I. J. Cox, J. Kilian, F. T. Leighton and T. Shamoan, "Secure Spread Spectrum Watermarking for Multimedia," *IEEE Trans. On Image Processing*, 1997, Vol. 6, No. 12, pp. 1673-1687.
- [33] S. Stankovic, "Time-Frequency Analysis and its Application in Digital Watermarking," *Review paper, EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, Special Issue on Time-Frequency Analysis and its Application to Multimedia signals*, Vol. 2010, Article ID 579295, 20 pages, 2010.
- [34] S. Stankovic, I. Orovic, N. Zaric, "An Application of Multidimensional Time-Frequency Analysis as a base for the Unified Watermarking Approach," *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 1, No. 3, pp.736-745, 2010.
- [35] W. Bender, D. Gruhl, N. Morimoto, and A. Lu, "Techniques for data hiding," *IBM Systems Journal*, 1996, vol. 35, pp. 313-336.
- [36] A. Haj and A. Errub, "Performance Optimization of Discrete Wavelets Transform Based Image Watermarking Using Genetic Algorithms," *Journal of Computer Science*, vol.4 , no.10,2008, pp.834-841.
- [37] S. Stankovic, I. Djurovic, I. Pitas, "Watermarking in the space/spatial-frequency domain using two-dimensional Radon Wigner distribution," *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol.10, No.4, pp.650-658, 2001.
- [38] A. Singh and A. Mishra, "Wavelet Based Watermarking on Digital Image," *Indian Journal of Computer Science and Engineering*, vol. 1, no. 2, 2011, pp. 86-91.
- [39] G. Bhatnagar and B. Raman, "A New Robust Reference Watermarking Scheme Based on DWT-SVD," *Computer Standards and Interfaces*, vol.31, no.5, 2009, pp. 1002-1013.
- [40] M. Orlandic, I. Orovic, S. Stankovic, "An image watermarking technique with optimal detection in the Wavelet domain," *ETRAN 2009*, Vrnjacka Banja, Serbia, 2009.
- [41] B. Kaur, A. Kaur, J. Singh, "Steganographic Approach For Hiding Image in DCT Domain," *International Journal Of Advances In Engineering & Technology*, vol. 1, no. 3, 2011, pp.72-78.
- [42] S. Stankovic, I. Orovic, N. Zaric, "Robust speech watermarking procedure in the time-frequency domain," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Vol. 2008, No. ID 519206, Page(s) 9 pages, 2008.
- [43] D. Kundur, D. Hatzinakos, "Toward Robust Logo Watermarking Using Multiresolution Image Fusion Principles," *IEEE Transactions on Multimedia*, vol. 6, pp. 185-198, Feb. 2004.
- [44] R. van Schyndel, A. Tirkel, and C. Osborne, "A digital watermark," *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*, vol. 2, 1994, pp. 86-90.
- [45] I. Orovic, P. Zogovic, N. Zaric, S. Stankovic, "Speech Signals Protection via Logo Watermarking based on the Time-Frequency Analysis," *Annals of Telecommunication*, Vol. 63, No. 5-6, pp. 276-284, 2008.

- [46] Y. Wang, J. Doherty and R. Van Dyck, "A Wavelet-Based Watermarking Algorithm for Ownership Verification of Digital Images," *IEEE Trans. Image processing*, vol. 11, no. 2, 2002, pp.77-88.
- [47] M. Hsieh, D. Tseng and Y. Huang, "Hiding Digital Watermarks Using Multiresolution Wavelet Transform," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 48, no. 5, 2001, pp.875-882.
- [48] M. Orovic, T. Pejakovic, A. Draganic, S. Stankovic, "MRI watermarking in the Compressive Sensing context," *57th International Symposium ELMAR-2015*, Zadar, Croatia, 2015.
- [49] M. Orovic, T. Pejakovic, "Logo Watermarking for Image Protection in the Compressive sensing Scenario," *22nd Telecommunications Forum TELFOR 2014*, Student paper, 2014.
- [50] I. Orović, T. Pejaković, M. Orović, "A comparison of CS Reconstruction Algorithms for Multicomponent Nonlinear Phase Signals", 4rd Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO, 2015.
- [51] M. Wu, B. Liu, "Data Hiding in Binary Image for Authentication and Annotation," *IEEE Transaction on Multimedia*, vol.6, pp. 528-538, 2004.
- [52] I. Orovic, A. Draganic, S. Stankovic, "Compressive Sensing as a Watermarking Attack," *21st Telecommunications Forum TELFOR 2013*, Novembar, 2013.
- [53] B. G. Mobaseri, "Digital watermarking in the joint time-frequency domain," *IEEE International Conference on Image Processing*, New York, vol. 3, pp. 481-484, September 2002.
- [54] C. Lin and Y. Ching, "A Robust Image Hiding Method Using Wavelet Technique," *Journal of Information Science and Engineering*, vol. 22, 2006, pp.163-174.
- [55] I. Orovic, N. Zaric, S. Stankovic, "An Analysis of Quantization Influence on Optimal Detection of Multiplicative Watermark," *55th International Symposium ELMAR 2013*, Zadar, Croatia, Sept. 2013, 2013.
- [56] X. Xia, C. Boncelet, and G. Arce, "A Multiresolution Watermark For Digital Images," in *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*, vol. 1, 1997, pp. 548–551.
- [57] E.J. Candes, J. Romberg, T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol.52, no.2, pp. 489-509, 2006.
- [58] J. Romberg, "Imaging via compressive sampling", *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2): 14 – 20, 2008.
- [59] N. O. Abokhdair, and A. Bt Abdul Manaf, "A Prediction-Based Reversible Watermarking for MRI Images," *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Computer, Control, Quantum and Information Engineering* vol. 7, No 2, 2013.
- [60] L.J. Stankovic, M. Dakovic, S. Stankovic, I. Orovic, "Sparse Signal Processing," in *the Book: Digital Signal Processing*, L. Stankovic, CreateSpace, Amazon, 2015, 2015.
- [61] M. Brajovic, I. Orovic, M. Dakovic, S. Stankovic, "Gradient-based signal reconstruction algorithm in the Hermite transform domain," *Electronic Letters*, 2015.

- [62] E. J. Candes, and M. B. Wakin, "An Introduction to Compressive Sampling," *Signal Processing Magazine, IEEE* , vol. 25, No. 2, pp. 21-30, March 2008.
- [63] G. Peyré, "Best basis compressed sensing", *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(5): 2613-2622, 2010.
- [64] I. Orovic, A. Draganic, S. Stankovic, "Sparse Time-Frequency Representation for Signals with Fast Varying Instantaneous Frequency," *IET Radar, Sonar & Navigation*, Online ISSN 1751-8792, Available online: 20 August, 2015.
- [65] E. Sejdic, A. Cam, L.F. Chaparro, C.M. Steele, T. Chau, "Compressive sampling of swallowing accelerometry signals using time-frequency dictionaries based on modulated discrete prolate spheroidal sequences", *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2012:101.
- [66] S. Stankovic, I. Orovic, "An Approach to 2D Signals Recovering in Compressive Sensing Context," *submitted to* , *Circuits, Systems & Signal Processing*, 2015.
- [67] V. Saligrama, M. Zhao, "Thresholded basis pursuit: Quantizing linear programming solutions for optimal support recovery and approximation in compressed sensing" 2008, arXiv:0809.4883.
- [68] M.A. Davenport, P.T. Boufounos, M.B. Wakin, R.G. Baraniuk, "Signal Processing With Compressive Measurements", *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 4(2): 445 – 460, 2010.
- [69] D. Donoho, "Compressed sensing", *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(4): 1289 – 1306, 2006
- [70] I. Orovic, S. Stankovic, "Improved Higher Order Robust Distributions based on Compressive Sensing Reconstruction," *IET Signal Processing* , Volume:8, Issue: 7, pp. 738 - 748, ISSN : 1751-9675, May, 2014.
- [71] I. Orovic, S. Stankovic, T. Thayaparan, "Time-Frequency Based Instantaneous Frequency Estimation of Sparse Signals from an Incomplete Set of Samples," *IET Signal Processing, Special issue on Compressive Sensing and Robust Transforms*, Volume:8, Issue: 3, pp. 239 - 245, ISSN: 1751-9675, May, 2014.
- [72] A.C. Gurbuz, J.H. McClellan, W. R. Scott, "A Compressive Sensing Data Acquisition and Imaging Method for Stepped Frequency GPRs," *IEEE Trans. Geosc. and Rem. Sens.* vol. 57. no. 7, 2009, pp. 2640–2650.
- [73] L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms", *Physica D*, 60:259-268, 1992.
- [74] L.J. Stankovic, S. Stankovic, M. Amin, "Missing Samples Analysis in Signals for Applications to L-estimation and Compressive Sensing," *Signal Processing*, vol. 94, Jan 2014, pp. 401-408, 2014
- [75] M.A.T. Figueiredo, R.D Nowak, S.J. Wright, "Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems", *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 1, no. 4, 586-597, 2007.

- [76] J. M. Boiucas-Dias and M. A. T. Figueiredo, "A New TwIST: Two-Step Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithms for Image Restoration," *IEEE Trans. on Image Proc.*, vol. 16, No 12, pp. 2992 – 3004, November 2007.
- [77] S. Stankovic, I. Orovic, LJ. Stankovic, "An Automated Signal Reconstruction Method based on Analysis of Compressive Sensed Signals in Noisy Environment," *Signal Processing*, vol. 104, Nov 2014, pp. 43 - 50, 2014.
- [78] M. Lustig, D. L. Donoho, J. M. Santos and J. M. Pauly, "Compressed Sensing MRI," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, No 2, pp. 72-82, March 2008.
- [79] V. K. Goyal, A. K. Fletcher, S. Rangan, "Compressive sampling and lossy compression", *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no.2, pp. 48-56, 2008.
- [80] K. T. Block, M. Uecker, J. Frahm, "Undersampled Radial MRI with Multiple Coils Iterative Image Reconstruction Using a Total Variation Constraint", *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 57, no. 6, pp. 1086-1098, 2007.
- [81] S. Stankovic, I. Orovic, LJ. Stankovic, A. Draganic, "Single-Iteration Algorithm for Compressive Sensing Reconstruction," *Telfor Journal*, Vol. 6, No. 1, pp. 36-41, 2014.
- [82] S. Stankovic, LJ. Stankovic, I. Orovic, "Relationship between the Robust Statistics Theory and Sparse Compressive Sensed Signals Reconstruction," *IET Signal Processing, Special issue on Compressive Sensing and Robust Transforms*, Volume:8, Issue: 3, pp. 223 - 229, ISSN: 1751-9675, May, 2014.
- [83] M. Lustig, D. Donoho, J. M. Pauly, "Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging", *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 58, no.6, pp. 1182 - 1195, 2007.
- [84] H. Yu, G. Wang, "Compressed sensing based interior tomography", *Physics in Medicine and Biology*, vol. 54, 2009, pp. 2791–2805.
- [85] P. Boyd, and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, March 8, 2004 - Business & Economics - 716 pages.
- [86] LJ. Stankovic, S. Stankovic, I. Orovic, M. Amin, "Robust Time-Frequency Analysis based on the L-estimation and Compressive Sensing," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, No. 5, pp. 499-502, 2013.
- [87] R. Baraniuk, "Compressive sensing", *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(4): 118-121, 2007.
- [88] R. Baraniuk, M. Davenport, R.A. DeVore, M. Wakin, "A simple proof of the restricted isometry property for random matrices", *Constr. Approx.* 28(3), 253–263, 2008.
- [89] A. Draganic, M. Brajovic, I. Orovic, S. Stankovic, "A Software Tool for Compressive Sensing based Time-Frequency Analysis," *57th International Symposium*, ELMAR-2015, Zadar, 2015.
- [90] A. Draganic, I. Orovic, N. Lekic, M. Dakovic, S. Stankovic, "Architecture for Single Iteration Reconstruction Algorithm," *4th Mediterranean Conference on Embedded Computing*, MECO 2015, 2015.

- [91] I. Stankovic, I. Orovic, S. Stankovic, "Image Reconstruction from a Reduced Set of Pixels using a Simplified Gradient Algorithm," *22nd Telecommunications Forum TELFOR 2014*, Belgrade, 2014.
- [92] S. Stankovic, I. Orovic, T. Pejakovic, M. Orovic, "Compressive sensing reconstruction of signals with sinusoidal phase modulation: application to radar micro-Doppler," *22nd Telecommunications Forum*, TELFOR, 2014.
- [93] M. Fornasier, H. Rauhut, "Compressive sensing" (Chapter in Part 2 of the Handbook of Mathematical Methods in Imaging (O. Scherzer Ed.). Springer, 2011.
- [94] S. Foucart, H. Rauhut, "A Mathematical Introduction to Compressive sensing", Springer, 2013
- [95] S. Zukovic, M. Medenica, A. Draganic, I. Orovic, S. Stankovic, "A Virtual Instrument for Compressive Sensing of Multimedia Signals," *56th International Symposium ELMAR 2014*, Zadar, Croatia, 2014.
- [96] S. Zukovic, M. Medenica, I. Orovic, S. Stankovic, "Synthetic software tool for Compressive Sensing reconstruction," *3rd Mediterranean Conference on Embedded Computing*, MECO, 2014
- [97] R. M. Willett, Z. T. Harmany, R. F. Marcia, "Poisson Image Reconstruction with Total Variation Regularization", *IEEE International Conference on Image Processing*, September 2010.
- [98] Blumensath T, Davies M (2009) Iterative hard thresholding for compressed sensing. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 27(3), 265–274.
- [99] S. Stankovic, I. Orovic, LJ. Stankovic, "Single-Iteration Algorithm for Compressive Sensing Reconstruction," *21st Telecommunications Forum TELFOR 2013*, Novembar, 2013.
- [100] E. Candès, J. Romberg, "Sparsity and incoherence in compressive sampling", *Inverse Problems*, vol. 23, no. 3 pp. 969-985, 2007.
- [101] J. Haupt, R. Nowak, "Signal reconstruction from noisy random projections", *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 52, no. 9, pp. 4036-4048, 2006.
- [102] A. Khajehnejad, W. Xu, A. Dimakis, B. Hassibi, "Sparse Recovery of Nonnegative Signals with Minimal Expansion", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59 (1), pp. 196-208, 2010
- [103] S. Stankovic, I. Orovic, "An Ideal OMP based Complex-Time Distribution," *2nd Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO - 2013*, pp. 109-112, June 2013, Budva, 2013.
- [104] I. Orovic, S. Stankovic, M. Amin, "Compressive Sensing for Sparse Time-Frequency Representation of Nonstationary Signals in the Presence of Impulsive Noise," *SPIE Defense, Security and Sensing*, Baltimore, Maryland, United States, 2013.
- [105] J. Wang, S. Kwon, and B. Shim, "Generalized orthogonal matching pursuit", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 12, pp. 6202 – 6216, 2012.
- [106] R. Chartrand, "Exact reconstructions of sparse signals via nonconvex minimization". *IEEE Signal Processing Letters*, 14(10): 707-710, 2007.
- [107] L1-MAGIC: <http://users.ece.gatech.edu/~justin/l1magic/>.
- [108] S. Stankovic, LJ. Stankovic, I. Orovic, "L-statistics combined with compressive sensing," *SPIE Defense, Security and Sensing*, Baltimore, Maryland, United States, 2013.

- [109] B. Jokanovic, M. Amin, S. Stankovic, "Instantaneous frequency and time-frequency signature estimation using compressive sensing," *SPIE Defense, Security and Sensing*, Baltimore, Maryland, United States, 2013.
- [110] R. Saab, R. Chartrand, Ö. Yilmaz, "Stable sparse approximation via nonconvex optimization", *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, 2008.
- [111] J. P. Haldar, D. Hernando, Z.-Pei Liang, "Compressed-Sensing MRI with Random Encoding", *IEEE Trans. on Medical Imaging*, vol. 30, no. 4, pp. 893 – 903, 2011.
- [112] A. Draganic, I. Orovic, S. Stankovic, M. Amin, "Rekonstrukcija FHSS signala zasnovana na principu kompresivnog odabiranja," *TELFOR 2012*, Beograd, 2012.
- [113] S. Stankovic, I. Orovic, M. Amin, "Compressed Sensing Based Robust Time-Frequency Representation for Signals in Heavy-Tailed Noise," *Information Sciences, Signal Processing and their Applications, ISSPA 2012*, Canada, 2012.
- [114] Boyd S, Vandenberghe L (2004) *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [115] D.L. Donoho, Y. Tsaig, I. Drori, J.L. Starck, "Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit", *IEEE Transaction on Information Theory*, vol. 58, no.2, 1094-1121, 2007.
- [116] K. Hayashi, M. Nagahara, T. Tanaka, "A User's Guide to Compressed Sensing for Communications Systems", *IEICE Trans. on Communications*, vol. E96-B, no. 3, pp. 685-712, 2013
- [117] LJ. Stankovic, I. Orovic, S. Stankovic, M. Amin, "Compressive Sensing Based Separation of Non-Stationary and Stationary Signals Overlapping in Time-Frequency," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 61, no. 18, pp. 4562-4572, Sept. , 2013.
- [118] S. Stankovic, I. Orovic, M. Amin, "L-statistics based Modification of Reconstruction Algorithms for Compressive Sensing in the Presence of Impulse Noise," *Signal Processing*, vol.93, no.11, November 2013, pp. 2927-2931 , 2013.
- [119] M. Duarte, M. Wakin, R. Baraniuk, "Fast reconstruction of piecewise smooth signals from random projections", *SPARS Workshop*, 2005.
- [120] Duarte M, Davenport M, Takhar D, Laska J, Sun T, Kelly K, Baraniuk R (2008) Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2): 83 – 91.
- [121] I. Orovic, S. Stankovic, "Compressive Sampling and Image Watermarking," *55th International Symposium ELMAR 2013*, Zadar, Croatia, Sept. 2013, 2013.
- [122] Flandrin P, P. Borgnat P (2010) Time-Frequency Energy Distributions Meet Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 8(6): 2974-2982.
- [123] M. Medenica, S. Zukovic, A. Draganic, I. Orovic, S. Stankovic, "Comparison of the algorithms for CS image reconstruction," *ETF Journal of Electrical Engineering 2014*, 09/2014; 20(1):29-39., 2014.